

回转壳体后屈曲分析的有限单元法*

杨国战

周承芳

张胜

(郑州工学院数力系) (大连理工大学力学所) (郑州机械研究所)

摘 要: 对壳体后屈曲性态的研究,一般是采用Koiter理论。⁽¹⁾⁽²⁾ 本文根据这一理论,利用有限单元法,提出了对回转壳体进行后屈曲分析的一般解法,并给出数值算例。由本文开发的程序有工程参考价值。

关键词: 有限元法, 前屈曲, 后屈曲, 稳定性。

中国图书分类号: O242

在工程结构中,常以杆,薄板和薄壳作为构件,为了充分发挥材料的承载能力,往往使这些构件主要承受轴向力或膜力,因此屈曲成为必须考虑的问题。

30年代以前,在经典临界载荷的研究方面,已经取得了很多有价值的结果,但是,当人们把经典的临界载荷与实验测得的破坏载荷相比较时,发现平板的破坏载荷远高于经典临界载荷,而壳体的破坏载荷却低于经典临界载荷;在圆柱壳的轴压屈曲时,前者只是后者的 $1/2-1/5$,这促使人们从理论和实验上进一步研究板和壳的后屈曲行为。近几十年来,稳定理论取得了很大的进展,其中由荷兰学者Koiter⁽¹⁾⁽²⁾(1945)建立的初始后屈曲理论最有代表性。到目前为止,在这一理论的指导下,尤其是对板壳结构的后屈曲性态,已有相当多的研究^{(2)~(4)}。从许多理论研究中可以看出,分析结构的后屈曲性态主要是采用能量法、摄动法和其它各种近似方法,分析的对象主要局限于一些比较简单的壳体。本文则是根据Koiter理论,利用有限元法对回转壳的后屈曲性态进行研究。

1 位移—应变关系,总势能表达式

为了描述分支点变形,引用Novozhilove应变—位移关系式:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \\ K_s \\ K_\theta \\ K_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

* 收稿日期:1990-05-22.

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{W}{R_1} \\
 & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right) \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r} v + \frac{\partial v}{\partial s} \\
 & + \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{R_1} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) \sin \varphi \\
 & \frac{2}{r} \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} v + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

u, w, v 分别为沿子午线方向, 周向和法向的位移,

R_1 的意义如图1所示.

设:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon\}_1 + \{\varepsilon\}_2 \quad (2)$$

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_s \\ K_\theta \\ K_{s\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

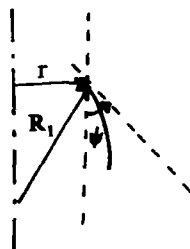


图 1

其中 $\{\varepsilon\}_1$ 为 u, w, v 的线性项, $\{\varepsilon\}_2$ 为 u, w, v 的二次项.

$$\text{设: } \{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v \end{Bmatrix} \quad (4)$$

可知:

$$\{\varepsilon\}_2^T = \left\{ \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_s^2, \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_\theta^2, \bar{\varepsilon}_s \bar{\varepsilon}_\theta \right\} \quad (5)$$

在研究壳体的后屈曲状态时, 对于载荷增量 P_1 , 相应位移扰动为 u, v, w , 总势能表达式为:

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_s^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_s \varepsilon_\theta + 2(1-\nu) \varepsilon_{s\theta}^2] + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} [K_s^2 + K_\theta^2 + 2\nu K_s K_\theta + 2(1-\nu) K_{s\theta}^2] + [N_s \varepsilon_{s2} + N_\theta \varepsilon_{\theta 2} + N_{s\theta} \varepsilon_{s\theta 2}] \right\} r d\theta ds - \iint P_1 f(s) w r d\theta ds \quad (6)$$

$f(s)$ 为载荷分布函数, $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$ 为分支点状态时结构的内力. 若前屈曲状态为轴对称问题, 可取 $N_{s\theta} = 0$.

$$\text{设: } [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D_{12} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2}, \quad D_{33} = \frac{2Eh}{1+\nu}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_s & 0 \\ 0 & N_\theta \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = C_{22} = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}, \quad C_{12} = \frac{Eh\nu^2}{12(1-\nu^2)}, \quad C_{33} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)};$$

则总势能表达式可写为:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \iint [\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} + \{K\}^T [C] \{K\} + \{\bar{\epsilon}\}^T [N] \{\bar{\epsilon}\}] r d\theta ds - \iint P_1 f(s) w r d\theta ds \quad (8)$$

2 确定分支点

设壳体在某一前屈曲状态附近有扰动位移 u 、 v 、 w 为:

$$u = u_n(s) \cos n\theta, \quad v = v_n(s) \sin n\theta, \quad w = w_n(s) \cos n\theta \quad (9)$$

在有限元离时, $u_n(s)$ 、 $v_n(s)$ 、 $w_n(s)$ 可用节点的广义座标的插值来表示。

进行有限元离散, 选用壳单元, 二节点, 每个节点有四个自由度, 在单元局部座标系描述。

另设: $u = u_n(s) \cos n\theta = (a_5 + a_6 s) \cos n\theta = \bar{u} \cos n\theta$

$$v = v_n(s) \sin n\theta = (a_7 + a_8 s) \sin n\theta = \bar{v} \sin n\theta \quad (10)$$

$$w = w_n(s) \cos n\theta = (a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3) \cos n\theta = \bar{w} \cos n\theta$$

$$\text{另有关系式: } \beta = -\left(\frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

$$\text{由条件: } s=0, \bar{u} = \bar{u}_i, \bar{v} = \bar{v}_i, \bar{w} = \bar{w}_i, \bar{\beta} = \bar{\beta}_i$$

$$s=2l, \bar{u} = \bar{u}_j, \bar{v} = \bar{v}_j, \bar{w} = \bar{w}_j, \bar{\beta} = \bar{\beta}_j$$

可以定出 a_1 、 a_2 、 \dots 、 a_8 , 于是可得:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{q\} \quad (11)$$

$$\text{其中 } \{q\}^T = \{\bar{u}_i, \bar{w}_i, \bar{v}_i, \bar{\beta}_i, \bar{u}_j, \bar{w}_j, \bar{v}_j, \bar{\beta}_j\}.$$

把 (11) 式代入 (1)–(6) 式并代入 (9) 式, 则欲求得分支

点模态和分支点载荷就等价于求解以下特征值问题^[6]:

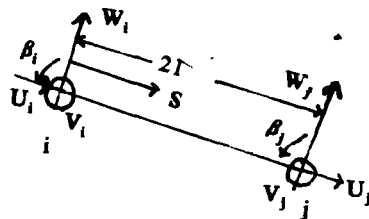


图 2

$$([K] + \lambda[K_g])\{q\} = 0 \quad (12)$$

由上式可以求得特征向量 $\{q_n^*\}$ 及相应的特征值 λ_c 。

3 初始后屈分析

假定在分支点附近, 后屈曲扰动位移为:

$$\begin{aligned} u &= u_0(s) + A_n u_n^*(s) \cos n\theta + u_{2n}(s) \cos 2n\theta \\ v &= A_n v_n^*(s) \sin n\theta + v_{2n}(s) \sin 2n\theta \\ w &= w_0(s) + A_n w_n^*(s) \cos n\theta + w_{2n}(s) \cos 2n\theta \end{aligned} \quad (13)$$

上式中 $\{u_n^*, v_n^*, w_n^*\}$ 为已知量, (u_0, w_0) 和 (u_{2n}, v_{2n}, w_{2n}) 为未知函数, A_n 为待定常数, 此时应变为:

$$\varepsilon = \varepsilon(u + \bar{u}) - \varepsilon(\bar{u}) \quad (14)$$

$$\text{上式中, } u \text{ 代表扰动位移 (13), } \bar{u} \text{ 代表几何缺陷: } \bar{u} = \mu_n \begin{Bmatrix} u_n^* \cos n\theta \\ v_n^* \sin n\theta \\ w_n^* \cos n\theta \end{Bmatrix} \quad (15)$$

将(13)式中的 (u_0, w_0) 和 (u_{2n}, w_{2n}, v_{2n}) 进行类似于(10)和(11)式的插值运算, 并由(13)~(15)式算得应变, 最后由(8)式求得总势能为:

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= \frac{1}{2} \{g_0\}^T [K_0] \{q_0\} + \frac{1}{2} \{q_{2n}\}^T [K_{2n}] \{q_{2n}\} \\ &+ \frac{1}{2} A_n^2 \{q_0\}^T [F_{0,n}] + \frac{1}{2} A_n^2 \{q_{2n}\}^T [F_{0,2n}] \\ &+ \frac{1}{2} A_n^4 d_n + \mu_n Q_n A_n - P_1 \{q_0\}^T [Q_0] \end{aligned} \quad (16)$$

4 问题的求解

在结构稳定性领域中, 人们几乎普遍采用承受保守载荷弹性系统稳定性的能量准则^[2]。在静力平衡状态, 当载荷一定时, 系统的总势能关于它的位置变量必须是极值的, 只要这个极值是真正的局部最小值, 平衡就是稳定的。

在讨论回转壳的后屈曲状态时, 将总势能 $\Delta\pi$ 对 $\{q_0\}$ 、 $\{q_{2n}\}$ 和 A_n 分别取驻值, 可得:

$$[K_0] \{q_0\} = P_1 [Q_0] - \frac{1}{2} A_n^2 [F_{0,n}] \quad (17)$$

$$[K_{2n}] \{q_{2n}\} = -\frac{1}{2} A_n^2 [F_{0,2n}] \quad (18)$$

$$(\{q_0\}^T [F_{0,n}] + \{q_{2n}\}^T [F_{0,2n}]) \cdot A_n + 2d_n A_n^3 + \mu_n Q_n = 0 \quad (19)$$

实质上,对回转壳后屈曲性态的研究,最终归结为求解以上由(17)、(18)和(19)所联立的方程。

首先由(17)和(18)式解得用 A_n 表示的 $\{q_0\}$ 和 $\{q_{2n}\}$,然后再代入方程(19),可得:

$$P_1 \cdot A_n - b A_n^2 = C \mu_n \quad (20)$$

其中:

$$b = \frac{2d_n - \frac{1}{2}[F_{0,n}]^T [K_0]^{-1} [F_{0,n}] - \frac{1}{2}[F_{0,2n}]^T [K_{2n}]^{-1} [F_{0,2n}]}{[Q_0]^T [K_0]^{-1} [F_{0,n}]} \quad (21)$$

$$C = \frac{-Q_n}{[Q_0]^T [K_0]^{-1} [F_{0,n}]} \quad (22)$$

若 $\mu_n = 0$,即没有初始缺陷时,有: $P_1 = b A_n^2$ (23)

乘子 b 称为后屈曲斜率;若 $b < 0$,则认为分支点模态是不稳定的。实际上,对于给定的缺陷 μ_n ,相应的载荷增量 P_1 是可以利用条件 $dP_1/dA_n = 0$ 求得的。

$$P_1 = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3} \cdot b^{1/3} \cdot (C \mu_n) \cdot \text{sgn}(C \mu_n) \quad (24)$$

我们同样可以利用条件 $d\mu_n/dA_n = 0$ 求得(24)式。

以上(20)~(24)式是对由(17)、(18)、(19)所联立方程组的定性讨论。而在实际求解过程中,要想利用微机实现对方程(17)、(18)、(19)的求解,本文采用直接迭代法,在程序设计上采用波前法^[7]。

计算步骤:

①首先给定初始缺陷 μ_n 。

②给定 A_n 的初值 A_n^0 ,载荷增量 P_1^0 。

③求解方程(17)和(18),可得 $\{q_0\}$ 、 $\{q_{2n}\}$ 。

④将求得的 $\{q_0\}$ 、 $\{q_{2n}\}$ 代入方程(19),解代数方程可得 A_n 。

⑤将求得的 A_n 、 $\{q_0\}$ 代入方程(17),由公式:

$$P_1 = ([Q_0]^T [K_0] \{q_0\} + \frac{1}{2} A_n^2 [Q_0]^T [F_{0,n}]) / [Q_0]^T [Q_0]$$

求得 P_1 。

⑥比较 $|P_1 - P_1^0|$ 是否满足精度要求,若满足,则停止迭代;若不满足,则置 $A_n^0 = A_n$; $P_1^0 = P_1$ 并回到③重新迭代。

5.数值算例

koiter 初始后屈曲理论的首次应用是轴压作用下的机身圆柱壳体,其次是轴压作用下的狭窄的圆柱壳的研究^[2],从以往的文献中可以看出,圆柱壳的后屈曲性态已经成为典型的后屈曲问题。

本文也以圆柱壳为例, 对其后屈曲状态做了初步的探讨。考虑一如图 3 所示的封闭圆柱壳, 受静水压力的作用。取圆柱壳初始缺陷为:

$$\bar{u} = \mu_n t \begin{cases} u_n^* \cos n\theta \\ w_n^* \cos n\theta \\ v_n^* \sin n\theta \end{cases}$$

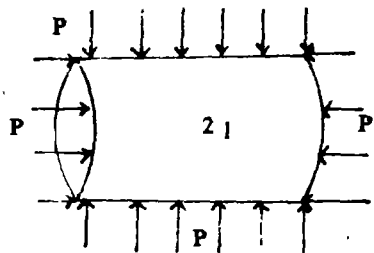


图 3

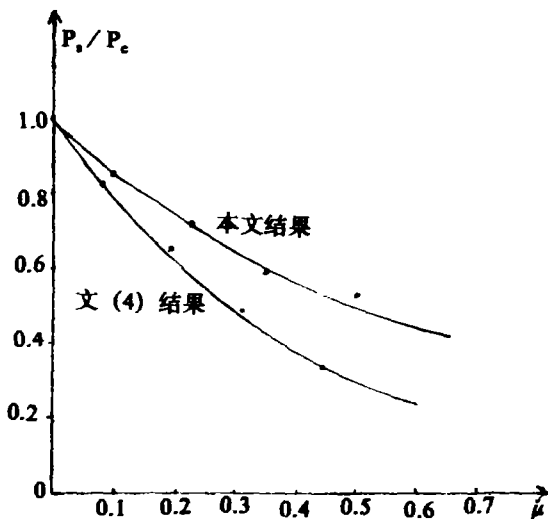


图 4

t 为壳体厚度。选定圆柱壳几何尺寸为: $l = 25\text{cm}$, 半径 $R = 10\text{cm}$, $t = 0.1\text{cm}$, 取 $\nu = 0.3$, $E = 2.0 \times 10^6 (\text{kg} / \text{cm}^2)$ 。将本文算得的结果与文 [4] 比较 (如图 4), 可知二者能很好地相吻合。

由 (23) 式可知, 当 b 为负值时, 缺陷敏感是由 b 值来确定的。文 [4] 给出

了 b 值随 $z = (\frac{l^2}{Rt}) \sqrt{1 - \nu^2}$ 的变化曲线,

如图 5 所示, 同时文 [4] 也指出, 如果缺陷一直保持为壳体厚度相当小的一部分, 那么经典的屈曲压力必须在 $Z = 1000$ 以上的范围内才是可靠的。对于 Z 的较中等的值, 屈曲压力大大低于经典载荷值。本文也计算了不同几何尺寸的圆柱壳对应的 b 值, 并与文 [4] 比较, 如图 5 所示。可以看出, 二者能较好地相符。证明本文提出的方法是可行的。

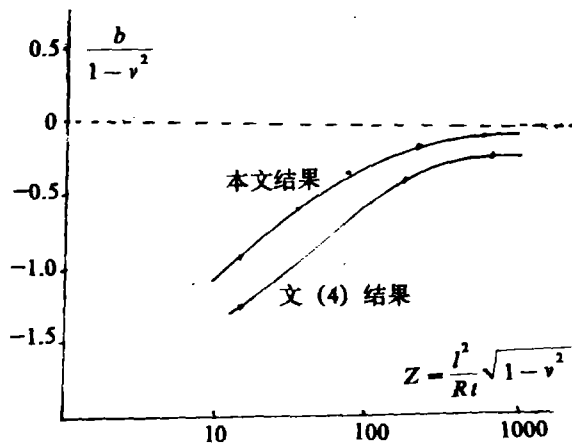


图 5

6 结束语

本文用有限单元法对回转壳体后屈曲性状的研究, 还仅仅是初步的。锥壳、球壳及其结合壳的后屈曲性状, 前屈曲波型对后屈曲的影响, 还没有给出具体的算例和讨论。加筋和单元划分对后屈曲性状的影响等一系列问题, 还有待于以后做进一步的研究。

在完成本文过程中,得到了大连理工大学工程力学研究所弹塑性材料与复合材料研究室全体老师的热情关怀和帮助,得到了郑州工学院计算力学教研室老师们的大力支持,在此,作者向他们表示感谢。

参 考 文 献

- (1) Elastic Stability and post-buckling Behavior, Nonlinear Problem. Edited By R. E. Lauger, University of Wisconsin Press Madison Wisconsin, 1963, P257-275, 大连工学院科技译文, 邓可顺译。
- (2) J.W.Hutchinson and W.T.Koiter, Postbuckling Theory. Applied Mechanics Reviews. vol.23, No.12, Dec; 1970. P1353-1366. 大连工学院科技译文, 邓可顺译。
- (3) Johann Arbocz, The Effect of Initial Imperfection On shell Stability. Thin Shell Structures. Theory, experiment and design, Edited By Y.C.Fung and E.E.Sechlar.
- (4) B.Budiansky, J.C.Amazigo. Initial Post-Buckling Behavior of Cylindrical Shells under External Pressure. J.Math. phys. vol.67, No.3, Sept.1968. P223-235, 大连工学院科技译文, 邓可顺译。
- (5) 黄宗宝, 任文敏. Koiter稳定理论及其应用. 力学进展 vol.17, No.1; Feb.1987. P30-38.
- [6] O.C.Zienkiewicz. 尹泽勇等译, 有限元法, 科学出版社 (1985)。
- [7] (英), E.欣顿, D.R.J 欧文著. 有限元程序设计, 新时代出版社。

Postbuckling Analysis of shell of Revolution by the Finite Element Method

Yang Guozhan (Department. Math. Zhengzhou Institute of Technology).

Zhou Zhengfang (Institute Mech. Dalian University of Technology) .

Zhang Sheng (Zhengzhou Institute of Machinery Research)

Abstract: The general treatment of postbuckling behaviors of shells of revolution has followed Koiter' theory^{(1) (2)}. Based on the theory, a general method is presented here by use of the finite element approach. In this paper, example solution for the postbuckling behaviors of cylindrical shell under hydrostatic press is made. The program presented can be used in engineering.

Keywords: Finite Element Method (FEM), Prebuckling Postbuckling, Stability.