复模态理论的摄动有限元法*

王 伟 赖永星**

(数理力学系)

摘 要: 本文借助状态空间，采用摄动有限元法对不定参数结构进行了动力分析．将复模态的二次特征值问题化为一次特征值问题，对不定参数在某一确定值邻域内的摄动，利用二阶摄动的有限元方法通过一次性计算得到了结构复特征值，状态特征向量的一、二阶摄动公式．

关键词: 复模态；有限元法；摄动；不定参数；特征值．

中国图书分类号: TU311.3

自 J.C.Chen 与 B.K.Wada 首先提出结构动力分析的矩阵摄动法[1]以来，关于振动系统的实模态矩阵摄动理论，已有许多文献，并有效地用于实验模态参数的修正、结构优化设计等．而对某些大阻尼结构，如高层建筑防震设计中经常采用各种阻尼器和粘贴高阻尼材料、汽车工程等，传统的比例阻尼假设不再成立，实模态摄动法用于系统局部修改设计的整体动力学分析受到一定的限制．关于复模态摄动理论文献也已发表许多[2][3][4][5][7]．本文是利用摄动有限元法[6]在结构动力修正中的优点，引入复模态摄动理论，通过一次性计算得到了具有一般粘性阻尼系统的结构，随其不定参数变化的复特征值，状态特征向量一、二阶摄动公式．

1 基本公式

1．1 状态空间中的基本方程

结构有限元动力学方程为:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\} \tag{1}$$

对应(1)式的特征方程 $([M]S^2+[C]S+[K])\{X\}=\{0\}$ (2)

引入状态矢量 $\{u\}^T=(\{\dot{x}\}^T,\{x\}^T)^T$

---

* 本科题是省自然科学基金资助项目

** 收稿日期: 1991.10.20

状态变换阵 $[T]=\begin{bmatrix} SI \\ I \end{bmatrix}$ (3)

则有: $\{U\}=\begin{bmatrix} SX \\ X \end{bmatrix}=\{T\}\{X\}$ (4)

U为对应复模态向量 {X} 的状态特征向量．从而 (2) 式可表示为:

$$([A]S+[B])\{U\}=\{O\} \tag{5}$$

其中: $[A]=\begin{bmatrix} [O] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}$ $[B]=\begin{bmatrix} -[M] & [O] \\ [O] & [K] \end{bmatrix}$ (6)

对应于(5)式的特征方程为 2N 次多项式，在复域内有 2N 个复特征值和特征向量 $(S_i=S^*_{i+n}, U_i=U^*_{i+n}, i=1,\cdots N)$若取正归化条件: $\{U_i\}^T[A]\{U_i\}=1$

则正交化条件可写成:

$$\{U_i\}^T[A][U_j]=\delta_{ij} \tag{7a}$$

$$\{U_i\}^T[B]\{U_j\}=-\delta_{ij}S_i \tag{7b}$$

$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$ 为Kroneck符号

1．2 单元摄动矩阵与整体摄动矩阵和[A]、[B]摄动矩阵的一般公式

结构的不定参数可表示为$P_i=P_{io}(1+\varepsilon_i)$，$P^o$一参数初值，$\varepsilon_i$一无量纲小量($|\varepsilon|<1$)，$i=1,\cdots r$ 根据单元特性矩阵的影响可分两类可变参数

①单元形不变参数(这类参数的变化不会引起几何形状的变化)

②单元形变参数(这类参数的变化会引起单元几何形状的变化)，本文仅讨论单元形不变参数

当第一类不定参数发生变化时，此时[N]矩阵积分域不变，相应的单元材料矩阵可表示为(舍去 $0(\varepsilon^2)$)

$$\left.\begin{aligned}
[\rho]&=[\rho_o]+\sum_{i=1}^{r}[\rho_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[\rho_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \\
[\mu]&=[\mu_o]+\sum_{i=1}^{r}[\mu_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[\mu_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \\
[D]&=[D_6]+\sum_{i=1}^{r}[D_i]\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{r}[D_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

把 (8) 式代入有限元单元特性矩阵的一般公式中可得相应的单元摄动矩阵为

$$\left.\begin{aligned}
[M^e]&=[M^e_o]+\sum_{i=1}^{r}[M^e_i]+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[M^e_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \\
[K^e]&=[K^e_o]+\sum_{i=1}^{r}[K^e_i]+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[K^e_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j \\
[C^e]&=[C^e_o]+\sum_{i=1}^{r}[C_i]+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[C^e_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

组集后可得结构的整体摄动矩阵

$$\left.\begin{aligned}[M]&=[M_o]+\sum_{i=1}^{r}[M_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[M_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\\ [K]&=[K_o]+\sum_{i=1}^{r}[K_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[K_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\\ [C]&=[C_o]+\sum_{i=1}^{r}[C_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[C_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

由(6)和(10)式可得[A][B]的矩阵摄动公式

$$[A]=\begin{bmatrix}[O] & [M]\\ [M] & [C]\end{bmatrix}=[A_o]+\sum_{i=1}^{r}[A_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[A_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\tag{11a}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}-[M] & [O]\\ [O] & [K]\end{bmatrix}=[B_o]+\sum_{i=1}^{r}[B_i]\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}[B_{ij}]\varepsilon_i\varepsilon_j\tag{11b}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}&[A_i]=\begin{bmatrix}[O] & [M_i]\\ [M_i] & [C_i]\end{bmatrix}\qquad [B_i]=\begin{bmatrix}-[M_i] & [O]\\ [O] & [K_i]\end{bmatrix}\\ &[A_{ij}]=\begin{bmatrix}[O] & [M_{ij}]\\ [M_{ij}] & [C_{ij}]\end{bmatrix}\qquad [B_{ij}]=\begin{bmatrix}-[M_{ij}] & [O]\\ [O] & [K_{ij}]\end{bmatrix}\end{aligned}\right.\tag{12}$$

2　复特征值状态向量的一、二阶摄动有限元解

当结构参数发生变化时，描述系统的动力学方程的物理参数也相应的变化．在改变量不大时即(ε_i;i = 1,⋯r)较小时，特征参数，$S_i\{U_i\}$也都只有小变化，可写成如下形式

$$S_s=S_o^s+\sum_{i=1}^{r}S_i^s\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}S_{ij}^s\varepsilon_i\varepsilon_j+O(\varepsilon^2)\tag{13a}$$

$$\{U^s\}=\{U_o^s\}+\sum_{i=1}^{r}\{U_i^s\}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{i}\{U_{ij}^s\}\varepsilon_i\varepsilon_j+O(\varepsilon^2)\tag{13b}$$

将 (13) 和 (11) 式代入 (5) 式比较等式两边 ε_i 的同次幂系数，且只保留到二次可得关于不定参数结构的动特性摄动递推方程式．

$$\varepsilon_o\qquad ([B_o]+S_o^s[A_o])\{U_o^s\}=\{O\}\tag{14a}$$

$$\varepsilon_i\qquad ([B_i]+S_o^s[A_i]+S_i^s[A_o])\{U_o^s\}+([B_o]+S_o^s[A_o]\{U_i^s\}=\{O\}\tag{14b}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i\varepsilon_j\qquad &([B_{ij}]+S_i^s[A_j]+S_j^s[A_i^s](1-\delta_{ij}^s)+S_{ij}[A_o]+S_o^s[A_{ij}])\{U_o^s\}\\ &+([B_i]+S_i^s[A_o]+S_o^s[A_i])\{U_j^s\}+([B_j]+S_j^s[A_o]+S_o^s[A_j])\{U_i^s\}(1-\delta_{ij})\\ &+([A_o]+S_o^s[B_o])\{U_{ij}^s\}=\{O\}\end{aligned}\tag{14c}$$

2．1 不定参数结构摄动特征值，状态向量的一阶摄动量的计算因为$[A_o][B_o]$对称将(14a)式转置可得

$$\{U_o^s\}^T([B_o]+S_o^s[A_o])=\{O\}^T \tag{15}$$

用$\{U_o^s\}^T$左乘(14b)式，同时考虑(7)(4)(12)式可得

$$S_i^s=-\{U_o^s\}^T([B_i]+S_o^s[A_i])\{U_o^s\} \tag{16a}$$

$$=-\{X_o^s\}^T(S_o^{s^2}[M_i]+S_o^s[C_i]+[K_i])\{X_o^s\} \tag{16b}$$

将$\{U_i^s\}$在状态向量空间中展开

$$\{U_i^s\}=\sum_{l=1}^{2N}a_l^s\{U_o^l\} \tag{17}$$

将(17)式代入(14b)式并用$\{U_o^k\}^T$左乘(14b)式，考虑(7)式当$k\neq s$时可得

$$a_k^s=-\frac{1}{S_o^s-S_o^k}(\{U_o^k\}^T([B_i]+S_o^s[A_i])\{U_o^s\}) \tag{18}$$

当$k=s$时，由$\{U^s\}^T\{A\}\{U^s\}=1$将其左边展开比较ε的一次项可求得

$$a_s^s=-\frac{1}{2}\{U_o^s\}^T[A_i]\{U_o^s\} \tag{19}$$

$$\therefore\ \{U_i^s\}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{2N}[\frac{1}{S_o^k-S_o^s}(\{U_o^k\}^T([B_i]+S_o^s[A_i])\{U_o^s\}]\{U_o^k\}$$

$$-[\frac{1}{2}\{U_o^s\}^T[A_i]\{U_o^s\}\{U_o^s\}]\{U_o^s\} \tag{20a}$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{2N}[\frac{1}{S_o^k-S_o^s}(\{X_o^k\}^T(S_o^{s^2}[M_i]+S_o^s[C_i]+[K_i])\{X_o^s\}]\{U_o^k\}$$

$$-\frac{1}{2}\{X_o^s\}^T(2S_o^s[M_i]+[C_i])\{X_o^s\}\{U_o^s\} \tag{20b}$$

2．2 不定参数结构特征值，状态向量二阶摄动量的计算

用与上节类似的方法可得：

$$S_{ij}^s=-\{U_o^s\}^T([B_{ij}]+S_i^s[A_j]+S_j^s[A_i](1-\delta_{ij})+S_o^s[A_{ij}])\{U_o^s\}-\{U_o^s\}^T([B_i]+S_i^s[A_o]$$

$$+S_o^s[A_i])\{U_j^s\}-\{U_o^s\}^T([B_j]+S_j^s[A_o]+S_o^s[A_j])\{U_i^s\}(1-\delta_{ij}) \tag{21}$$

$$U_{ij}^s=\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{2N}[\frac{1}{S_o^k-S_o^s}(\{U_o^k\}^T([B_{ij}]+S_i^s[A_j]+S_j^s[A_i](1-\delta_{ij})+S_o^s[A_{ij}])\{U_o^s\}$$

$$+\{U_o^k\}^T([B_i]+S_o^s[A_i]+S_i^s[A_o]\{U_j^s\}+\{U_o^k\}^T([B_j]+S_j^s[A_o]+S_o^s[A_j])$$

$$\{U_i^s\}(1-\delta_{ij}))]\{U_o^k\}-(\{U_o^s\}^T[A_i]\{U_j^s\}+\{U_i^s\}^T[A_o]\{U_j^s\}$$

$$+\{U_i^w\}^T[A_j]\{U_o^s\}+\frac{1+\delta_{ij}}{2}\{U_o^s\}^T[A_{ij}]\{U_o^s\})\{U_o^s\} \tag{22}$$

利用 (4)(12) 式还可推导出用 M，C，K，X，S 表示的 S_y^s，$\{U_{ij}^s\}$ 这里就不赘述了．

3 算　例

图 a 为一作纵向振动的杆，为了减少振动加了 6 个阻尼器．因为杆是作纵向振动为了计算简便我们采用了集中质量矩阵．共取 6 个单元．

当参数 $\varepsilon_{E6}=\varepsilon_{E5}=0.1,\varepsilon_{\rho1}=\varepsilon_{\rho2}=0.1,\varepsilon_{c1}=\varepsilon_{c2}=0.03$ 时各单元初始矩阵和摄动矩阵如下

$$[K_o^r]=\frac{ES}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\qquad [M_o^r]=\frac{\rho sl}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad [C_o^r]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}C_r$$

其中　$(r=1,\cdots 6)$.　$C_1=C_2=0.3C\quad C_3=C_4=0.2C\quad C_5=C_6=0.1C$

$$[K_1^r]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ (r=1,\cdots 4)\qquad [M_1^r]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ (r=4,\cdots 6)$$

$$[C_1^r]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ (r=3,\cdots 6)\qquad [K_1^5]=[K_1^6]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{ES}{l}$$

$$[M_1^1]=[M_1^2]=[M_1^3]=\frac{\rho SL}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad [C_1^1]=[C_1^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}C$$

按常规有限元组集后引入支承条件可得 (取 $E_o=S_o=L_o=1,\rho_o=2,C=1$)

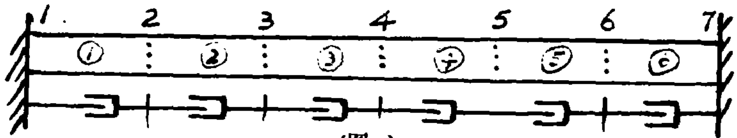
$$[K^o]=\begin{bmatrix}2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1\\ & & & -1 & 2\end{bmatrix}\qquad [K_1]=\begin{bmatrix}0 & & 0\\ & 0.1 & -0.1\\ 0 & -0.1 & 0.2\end{bmatrix}$$

$$[M^o]=\begin{bmatrix}2 & & & & 0\\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2\end{bmatrix}\qquad [M^1]=\begin{bmatrix}-0.2 & & & & 0\\ & -0.2 & & & \\ & & -0.1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}$$

$$C^0=\begin{bmatrix}0.6 & -0.3 & & 0 & \\ -0.3 & 0.5 & -0.2 & & \\ & -0.2 & 0.4 & -0.2 & \\ & & -0.2 & 0.3 & -0.1\\ & 0 & & -0.1 & 0.2\end{bmatrix}\qquad [C_1]=\begin{bmatrix}0.06 & -0.03 & 0\\ -0.03 & 0.03 & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}$$

S_i 一二阶的摄动解与 S_o 的精确解比较的相对误差如下表，因为特征根成共轭对出现，所以表中只给出了前五阶特征值比较结果．

序 号	I	II	III	IV	V
1 阶	3.31E−4	4.56E−3	4.024E−4	1.766E−3	1.052E−4
2 阶	2.12E−6	3.839E−4	3.129E−6	1.316E−4	1.559E−5



(图 a)

4 结束语

本文借助于状态空间，采用摄动有限元法对不定参数结构进行了动力分析，将复模态的二次特征值化为一次特征值，通过一次性计算得到了具有一般粘性阻尼系统的结构，随其不定参数变化的复特征值，状态特征向量一二阶摄动公式.这对有些工程问题的防震设计的动力分析有实用价值，而且具有计算简单、方便、节省计算工作量等优点.

参 考 文 献

〔1〕 J.C.Chen and B.K.Wada. matrix perturbation for structural dynamicl analysis. AIAA.J.1977

〔2〕 陈塑寰. 复模态理论的矩阵摄动法. 吉林工业大学学报. 3.1986.

〔3〕〔4〕〔5〕 郑兆昌. 多自由度系统复模态理论的摄动方法（一）（二）（三）. 应用力学学报. Vol.2 No.1 Vol.2 No.4 1985 Vol.7 No.2 1990

〔6〕 王伟, 郝伟. 摄动有限元方法在结构动特性灵敏度分析中的应用. 第四届全国振动理论及应用学术会议论文集(上)

〔7〕 王伟. 一般粘性阻尼多自由度系统的模态分析. 郑州工学院学报. 1. 1983

The Perturbation Finite Element Method for Complex Mode Theory

(Wang Wei Lai Yongxing)
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper presents the analysing method on dynamic charactertics for unpropertional viscous damping structure with parameter uncertainties. By use of second order perturbation finite method and changing two order complex eigenvalue into one order with state space, it obtains one and two order perturbation formulas of complex eigenvalue and state vector in once calculation, when parameter uncertainties of a structure perturbate in the neighbourhood of a definite value.

Keywords: Complex method, Finite Element Method, Perturbation, Parameter Uncertainties, eigenvalue.