

# 无穷边界单元及其在地基模拟中的应用\*

李庆斌 周鸿钧

(郑州工学院应力分析及抗震研究室)

**摘 要:** 本文根据边界元理论,提出了两种型式的无穷边界单元,并将其应用到地基模拟问题中,给出了无穷边界单元的合理位置。实例计算表明了无穷边界单元具有节省单元和精度高的优点。

**关键词:** 边界元,无穷边界单元,地基,振动

**中国图书分类号:** TB123

无限与半无限平面域的分析问题是工程中经常遇到的一类重要问题。地下工程中的隧道、地下厂房、水坝和海洋结构与地基的相互作用问题,都属于这类问题。由于所考虑的问题涉及到无限或半无限区域,往往给数值分析带来附加的困难。域内法在处理这类问题时,所取的计算模型是从物理方面使其简化,即划出一定的计算范围作为影响范围,而在这个范围以外的区域则认为不产生影响,这种考虑显然具有较大的近似性,对于精确的计算方案不甚合理。边界元法在处理此类问题上比域内法具有明显的优越性,这是边界单元法的显著优点之一。边界单元法采用 Kelvin 基本解,自动满足无穷远处的边界条件,可以方便地解决孔洞问题(外问题)。当采用 Melan 和 Mindlin 基本解,还可以方便地解决边界规则的半无限平面问题<sup>[1]</sup>。然而,当半无限平面域的边界属非规划时,上述方法则不能直接使用。这对一般只能截断部分边界,近似地变半无限为有限域问题,这样就大大降低了计算精度且增加了计算工作量。文献[1]曾提出了利用无穷边界单元的概念处理这类问题,显示了较大的优越性。但其结论不甚完善,在个别细节上存在失误。本文给出两种型式的无穷边界单元,使这种思想方法推广到更多的适用范围中。利用本文方法可以处理任何型式的无限域或半无限域问题。

## 1 无穷边界单元

文献[1]已经证明,对于无限平面域问题,直接对无穷边界积分,所得边界积分方程为:

---

\* 收稿日期: 1990.03.19

$$C_1 u_1^i + S_{u_k} P_k^* d\Gamma + u_1 + \omega C_1 = \int_{\Gamma_1} t_k U_k^* d\Gamma \quad (1)$$

其中,  $u_1$ 、 $\omega$  为刚体的平动和转动引起的平动位移和转动位移, 在平面问题中, 可令  $\omega = 0$  来考虑,  $\Gamma_1$  为有限边界 (如图1所示)。

$$U_k^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [\delta_k (4\nu - 3) \ln r + r_1 r_k] \quad (2)$$

$$P_k^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ (1-2\nu)(n_k r_1 - r_k n_1) - [\delta_k (1-\nu) + 2r_1 r_k] r_m n_m \} \quad (3)$$

为 Kelvin 基本解。

那么, 将这种思想方法应用到半无限平面域问题时,  $\Gamma_1$  就成为半无限的边界了, 然后在这个无限长的边界上进行单元剖分和积分处理, 即可建立边界元方程。如果直接对这个无限长边界进行剖分, 所需的单元数非常多, 使用起来也不方便, 为了节约单元, 减少计算工作量, 必须引入无边界单元, 如图2所示。

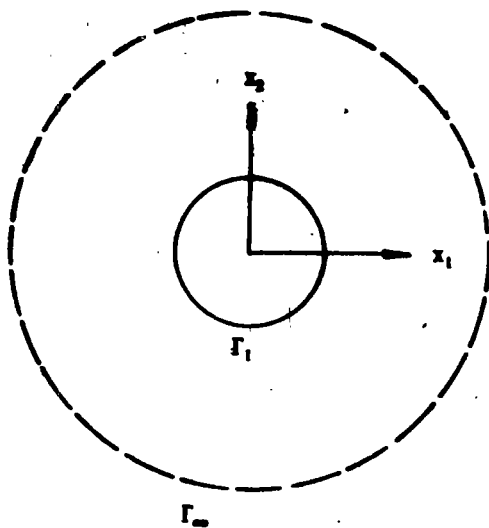


图 1

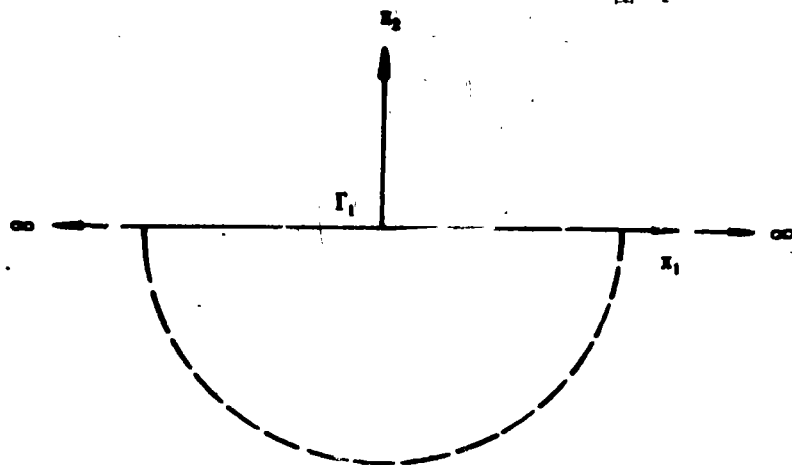


图 2

由图2可以看出, 计算中所用到的无边界单元不外乎两种型式, 如图3所示。

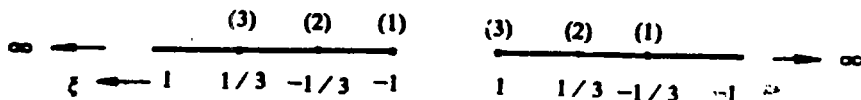


图 3

由文献[1], 考虑到无限远处的位移具有非平衡力系的  $\ln \frac{1}{r}$ -型、平衡力系的  $\frac{1}{r}$ -型和刚体

位移, 无限远处面力为零和坐标无限的特点, 不难构造出这两种单元的插值函数。这里略去推导过程直接给出结果于后。

### 1.1 无穷单元a的插值函数

#### 1.1.1 坐标

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sum_{i=1}^3 x_1^i \varphi_i(\xi) \\
 \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(9\xi^2 - 1)/(1 - \xi)^2 \\
 \varphi_2(\xi) &= \frac{4}{3}(1 + \xi)(1 - 3\xi)/(1 - \xi)^2 \\
 \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{6}(1 + \xi)(1 + 3\xi)/(1 - \xi)^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

#### 1.1.2 位移

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{i=1}^3 u_1^i \varphi_i'(\xi) \\
 \varphi_1'(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [-\ln 3 - \ln(1 - \xi) + (\frac{3}{2} \ln 2)(1 - \xi)] \\
 \varphi_2'(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [\ln \frac{27}{4} + 2\ln(1 - \xi) - (\frac{3}{2} \ln 3)(1 - \xi)] \\
 \varphi_3'(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [-\ln(1 - \xi) + (\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2})(1 - \xi)]
 \end{aligned} \tag{5}$$

#### 1.1.3 面力

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \sum_{i=1}^3 t_1^i \tilde{\varphi}_i(\xi) \\
 \tilde{\varphi}_1(\xi) &= \frac{9}{16}(\xi - \frac{1}{3})(\xi + \frac{1}{3})(1 - \xi) \\
 \tilde{\varphi}_2(\xi) &= -\frac{27}{16}(1 + \xi)(\xi - \frac{1}{3})(1 - \xi) \\
 \tilde{\varphi}_3(\xi) &= \frac{27}{16}(1 + \xi)(\xi + \frac{1}{3})(1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{6}$$

### 1.2 无穷单元b的插值函数

#### 1.2.1 坐标

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{6}(1 - \xi)(1 - 3\xi)/(1 + \xi)^2 \\
 \varphi_2(\xi) &= \frac{4}{3}(1 - \xi)(1 + 3\xi)/(1 + \xi)^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{1}{2}(9\xi^2 - 1)/(1 + \xi)^2$$

### 1.2.2 位移

$$\begin{aligned}\varphi'_1(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [\ln \frac{16}{27} - \ln(1 + \xi) + (\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2})(1 + \xi)] \\ \varphi'_2(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [\ln \frac{27}{4} + 2\ln(1 + \xi) - (\frac{3}{2} \ln 3)(1 + \xi)] \\ \varphi'_3(\xi) &= \frac{1}{\ln(\frac{4}{3})} [-\ln 3 - \ln(1 + \xi) + (\frac{3}{2} \ln 2)(1 + \xi)]\end{aligned}\quad (8)$$

### 1.2.3 面力

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_1(\xi) &= -\frac{27}{16}(1 - \xi)(\xi - \frac{1}{3})(1 + \xi) \\ \tilde{\varphi}_2(\xi) &= \frac{27}{16}(1 - \xi)(\xi + \frac{1}{3})(1 + \xi) \\ \tilde{\varphi}_3(\xi) &= \frac{9}{16}(\xi - \frac{1}{3})(\xi + \frac{1}{3})(1 + \xi)\end{aligned}\quad (9)$$

利用上述诸插值函数, 代入边界元方法中的诸积分, 采用相同的计算格式, 可以得出相应的各系数矩阵, 其余的计算与一般边界元法相同。

## 2 地基模拟方法

本文主要介绍地基对建筑在其上的构筑物的动力特性的影响。为此, 首先扼要阐述计算动特性的特解边界元法。

对于均质的各向同性的线弹性体, 其简谐振动的控制微分方程为:

$$L(u_i) + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (10)$$

这里,  $L(u_i) = (\lambda + \mu)u_{ii} + \mu u_{kk}$

其中:  $\lambda$ 、 $\mu$ 为拉梅常数,  $\rho$ 为质量密度,  $\omega$ 为弹性体的自振频率。

$$\text{我们将域内位移作如下近似后, } u_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{ik}(x, \xi^n) \varphi_k(\xi^n) \quad (11)$$

式中:  $\varphi_k$  = 待定参数;

$$C_{ik}(x, \xi^n) = (R - r)\delta_{ik} \quad (12)$$

其中:  $R$  = 所有边界节点中两点间的最大距离;  $r$  = 两点间的距离;  
 $\delta_{ik}$  = Kronecker delta. 再利用特解边界元法的基本原理, 可以得出其边界元方程为:

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = \omega^2 [M]\{u\} \quad (13)$$

$$\text{这里, } [M] = \rho([H][D] - [G][T]) \cdot [K] \quad (14)$$

$$[K] = [P]^{-1}$$

$$P_{ik} = \delta_{ik}(R - r)$$

$$D_{ik} = \frac{1}{\mu} [(C_1 r - C_2 R) \delta_{ik} r^2 - C_3 Y_i Y_k r]$$

$$T_{ik} = (C_4 r - C_5 R) Y_i n_k + (C_6 r - 2C_2 R) Y_k n_i + [(C_6 r - 2C_2 R) \delta_{ik} - 2C_3 Y_i Y_k / r] Y_j n_j$$

其中:  $C_1 = (9-10\nu)/90(1-\nu)$ ,  $C_2 = (1-2\nu)/2(3-4\nu)$ ,  $C_3 = 1/30(1-\nu)$ ,  $C_4 = (5\nu-1)/15(1-\nu)$ ,  $C_5 = \nu/(1-2\nu)$ ,  $C_6 = (4-5\nu)/15(1-\nu)$ ,  $Y_i = x_i - \xi_i^m$ ,  $n_i$  = 外法线方向余弦。

将方程(13)中的诸系数矩阵按照边界条件  $t_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  写成分块形式, 再将其引入后, 得到最终的代数特征方程为:

$$[A]\{x\} = \omega^2 [\bar{M}]\{x\} \quad (15)$$

其中:  $\{x\} = [u_1 \quad t_2]^T$

$$[A] = \begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix}, \quad [\bar{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

当求解方程(15)即可得出构筑物本身的自振频率和相应的振型。

当考虑地基的影响时, 即会涉及到两个区域的耦合问题, 以下介绍耦合原理。

对于被耦合的两个区域分别利用边界元法, 得到形如方程(13)的两个方程, 将其用分块矩阵表示为:

$$[H^1 \quad H_a^1] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u_a^1 \end{Bmatrix} = [G^1 \quad G_a^1] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u_a^1 \end{Bmatrix} = \omega^2 [M^1 \quad M_a^1] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u_a^1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$[H^2 \quad H_a^2] \begin{Bmatrix} u^2 \\ u_a^2 \end{Bmatrix} = [G^2 \quad G_a^2] \begin{Bmatrix} u^2 \\ u_a^2 \end{Bmatrix} = \omega^2 [M^2 \quad M_a^2] \begin{Bmatrix} u^2 \\ u_a^2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

式中诸量右上标的数字代表区域号, 右下标a表示耦合边。

根据耦合边的连续条件:  $u_a^1 = u_a^2 = u_a$ ,  $t_a^1 = -t_a^2 = t_a$ , 可以将方程(16)、(17)耦合在一起, 即有:

$$\begin{bmatrix} H^1 & 0 & H_a^1 \\ 0 & H^2 & H_a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 & G_a^1 \\ 0 & G^2 & -G_a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ t_a \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M^1 & 0 & M_a^1 \\ 0 & M^2 & M_a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u_a \end{Bmatrix} \quad (18)$$

再引入自由振动问题的边界条件, 可以得到形如方程(15)的代数特征方程, 只是这里的系数有所改变。解此方程可以得到双域问题的自振频率和相应的振型。

### 3 数值计算

利用上述原理, 我们对如图4所示的重力坝的自振频率进行了计算。为了考查地基表

面无穷边界单元所取位置的影响, 计算中分别取  $L=3H$  和  $L=8H$  ( $H$  为坝的高度) 进行对比。

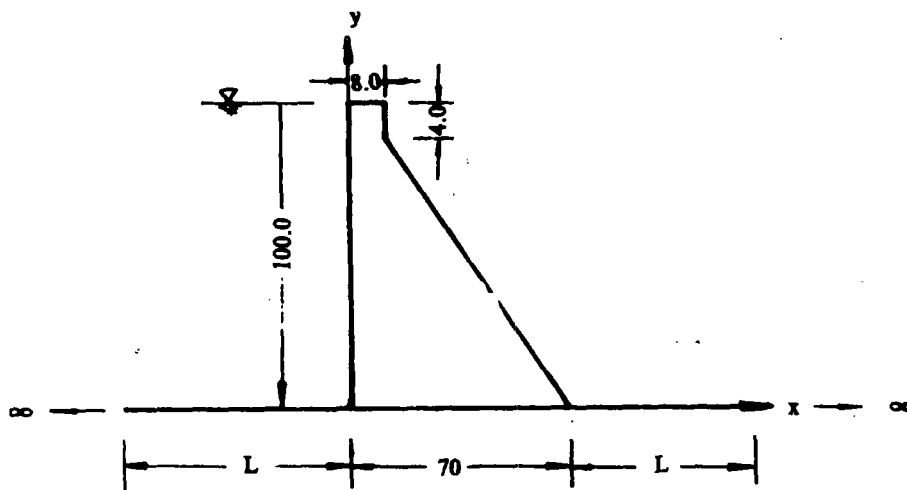


图 4

计算时假定坝体的弹性模量为  $3 \times 10^6 \text{T/m}^2$ , 容量为  $2.4 \text{T/m}^3$ , 泊松比  $\nu=0.16$ , 地基的弹性模量取为  $3 \times 10^6 \text{T/m}^2$ , 泊松比为 0.16, 并且忽略地基惯性的影响, 其原因主要是地基的质量相对于坝体为无穷大的缘故。计算结果列于表 1 中。

表 1 无穷元的位置影响比较

$\omega_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$L=3H$	22.23	36.87	48.04	85.28	132.58	155.88
$L=8H$	22.20	36.68	47.98	85.22	132.44	155.81
误差 (%)	0.13	0.52	0.12	0.07	0.11	0.04

由表可以看出, 取  $L=8H$  和  $L=3H$  所计算出的前六阶频率相当接近, 其误差均不超过 1%, 因此, 在  $L=3H$  处设置无穷单元即可满足精度要求。

确定了无穷单元的合理位置, 我们又对地基对坝体自振频率的影响进行了分析, 计算中假定坝高为 100 米, 底宽为 75 米, 坝体材料参数同前, 地基的弹性模量按照坝体与地基的弹模比  $E_D/E_F$  推算得出, 其计算结果列于表 2。

表 2 地基的影响分析表

$E_D/E_F$	No.			
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
0	28.2	65.8	79.5	119.6
0.1	26.7	60.9	70.4	115.7
0.5	23.4	49.1	52.8	95.0
1.0	20.4	38.7	46.3	84.1
5	11.8	19.0	32.6	64.2
10	8.7	13.6	26.4	60.6
100	2.9	4.2	10.0	58.4

由表 2 可以看出,地基弹模愈软,对坝体自振频率的影响愈大。

## 4 结 语

通过上述计算分析,不难得出如下结论:

4.1 无穷边界单元的引入为处理带有无穷边界的问题带来了极大的方便,在保证计算精度的前提下可以节省许多单元,从而节省大量机时。

4.2 重力坝的地基对其自振频率的影响较大,而且这种影响随着地基的变软更愈加明显。因此,在计算重力坝本身的自振频率时,必须同时考虑地基的影响。

## 参 考 文 献

- (1) 张楚汉,宋崇民. 无限与半无限平面弹性问题的边界元技术. 清华大学学报, Vol.27, No.2, 1987, PP85-95
- (2) 李庆斌,周鸿钧,林皋. 特解边界元法及其在若干问题中的应用. 郑州工学院学报, Vol.11, No.1, 1990
- (3) Zhou Hongjun, Li Qingbin & Lin Gao. Free Vibration Analysis of Dam-Foundation-Water System Using Particular Solution Boundary Element Method. Proc. 2nd Intern. Conf. Struc. Eng. & Comp. Beijing, 1990
- (4) 李宗坤. 坝踵裂缝和坝基对重力坝动力特性影响的边界元分析. 郑州工学院硕士学位论文, 1988

## Infinite Boundary Element and its Application in Imitation of Foundation

Li Qingbin    Zhou Hongjun  
(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** In this paper, two infinite boundary elements are presented. They are applied to imitate the effect of foundation, and furthermore, the reasonable location of infinite boundary elements on the boundary of foundation is given. Some examples are computed, and the results imply that the method presented in this paper can save lots of boundary elements and have a high accuracy at the same time.

**Keywords:** boundary element, infinite boundary element, ground, vibration