第12卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.12 No.1
1991年 3月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1991

大位移变形弹性理论的守恒律*

牛焱洲

（能源、水利部中南勘测设计院科研所，长沙）

摘　要：本文从大位移变形弹性理论的最小势能原理和余能驻值原理出发，分别导出了大变形弹性体的一组守恒律和对偶守恒律．据此可定义断裂理论中的守恒积分和它们的对偶形式．

关键词：弹性理论，弹性体，变形

中国图书分类号：0346·1

1918 年，Noether 概括了力学研究中潜在的不变性、对称性规律，得到了著名的 Noether 定理[1]．1972 年 Knowles 和 Sternberg[2] 发展了弹性体的一组守恒律，他们用 Noether 定理论证了对于非线性弹性的三维大变形体，存在七个与路径无关的积分．从而揭示了 Rice[3] 的 J 积分本质上是弹性体的一种守恒律．1976 年 Fletcher[4] 建立了线弹性动力学的六个守恒律，并研究了这组守恒律的完全性．1974 年 Bui[5] 讨论了用余能密度表示的对偶 J 积分，等等．但他们大多是利用 Noether 定理来得到上述守恒律的．而且基于余能密度的对偶 J 积分仍然局限于小位移变形的范畴．本文直接从众所熟悉的弹性理论的最小势能原理和余能驻值原理[9] 出发，利用空间坐标系的平移，得到了三维大变形弹性体的守恒律（三个）和对偶守恒律（三个）．特别是三维大变形弹性体的对偶守恒律，还是第一次得到．

本文和文[6~8] 的工作不仅拓展了变分原理的应用范围，而且赋与守恒积分以一种直接的物理解释．

1　基于最小势能原理的大变形弹性体的守恒律

在以下的研究中，采用 Lagrange 坐标，在大位移变形条件下，弹性体的基本方程为：

几何关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\ u_{k,j}) \qquad 在\tau内 \tag{1}$$

* 收稿日期：1990.02.21

平衡方程:

$$[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+F_i=0 \qquad \text{在}\tau\text{内} \tag{2}$$

外力边界条件:

$$(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}\ n_j=\bar{p}_i \qquad \text{在}S=S_p\text{上} \tag{3}$$

位移边界条件:

$$u_i=\bar{u}_i \qquad \text{在}S=S_u\text{上} \tag{4}$$

设在状态Ⅰ，用笛卡尔直角坐标x_i标定各点。而在与状态Ⅰ无限接近的状态Ⅱ，用与x_i平行的笛卡尔直角坐标X_i标定各点，且:

$$x_1=X_1+\delta a_1 \tag{5}$$

δa_1为无穷小量。

则状态Ⅰ的势能泛函为:

$$\prod\nolimits_{\mathrm{I}}=\int_\tau(A\varepsilon_{ij}^{\circ})-F_iu_i^{\circ})d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_iu_i^{\circ}dS \tag{6}$$

状态Ⅱ的势能泛函为:

$$\prod\nolimits_{\mathrm{II}}=\int_\tau(A\varepsilon_{ij})-F_iu_i)d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_iu_idS \tag{7}$$

考虑到式(5)，略去高阶微量，显然有:

$$u_i(X_1)-u_i^{\circ}(x_1)=u_i(X_1)-u_i^{\circ}(X_1)-\frac{\partial u_i^{\circ}(x_1)}{\partial x_1}\delta a_1$$

$$=\delta u_i(x_1)-\frac{\partial u_i^{\circ}(x_1)}{\partial x_1}\delta a_1 \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}(X_1)-\varepsilon_{ij}^{\circ}(x_1)=\delta\varepsilon_{ij}(X_1)-\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{\circ}(x_1)}{\partial x_1}\delta a_1 \tag{9}$$

式(7)和(6)相减，有:

$$\triangle\prod=\prod\nolimits_{\mathrm{II}}-\prod\nolimits_{\mathrm{I}}=\int_\tau[A(\varepsilon_{ij})-A(\varepsilon_{ij}^{\circ})-F_i(u_i-u_i^{\circ})]d\tau$$

$$-\int_{S_p}\bar{p}_i(u_i-u_i^{\circ})dS \tag{10}$$

注意到略去高阶微量，有:

$$A(\varepsilon_{ij})-A(\varepsilon_{ij}^{\circ})=\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}^{\circ}}(\delta\varepsilon_{ij}(X_1)-\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{\circ}(x_1)}{\partial x_1}\delta a_1)$$

因此，略加整理得:

$$\triangle\prod=\int_\tau[\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}^{\circ}}\delta\varepsilon_{ij}-F_i\delta u_i)d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_i\delta u_idS$$

$$-\{\int_\tau(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}\frac{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}{\partial x_1}-F_i\frac{\partial u^\circ_i}{\partial x_1})d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_i(\frac{\partial u^\circ_i}{\partial x_1}dS\}\delta a_1$$

引入几何关系式：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})$$

所以：

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta u_{i,j}+u_{k,i}\ \delta u_{k,j})=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_{k,j}$$

$$=[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_k]_{,j}-[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}\delta u_k$$

利用Green公式，有：

$$\int_\tau[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_k]_{,j}d\tau=\int_S\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_k n_j dS$$

考虑到$S=S_p+S_u$，且在S_u上，$\delta u_k=0$，所以：

$$\int_\tau[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_k]_{,j}d\tau=\int_{S_p}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_k n_j dS$$

因此：

$$\triangle\prod=-\int_\tau\{[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+F_k\}\delta u_k(X_1)d\tau$$

$$+\int_{S_p}[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})n_j-\bar{p}_k]\delta u_k(X_1)dS$$

$$-\{\int_\tau[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}\frac{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}{\partial x_1}-F_i\frac{\partial u^\circ_i}{\partial x_1}]d\tau-\int_{S_p}\bar{p}_i\frac{\partial u^\circ_i}{\partial x_1}dS\}\delta a_1 \tag{11}$$

注意到式(10)$\triangle\prod$在状态Ⅰ、Ⅱ无限接近时即是$\delta\prod$，由最小势能原理，问题的精确解应使：

$$\delta\prod=0 \tag{12}$$

所以式(11)右端等于零，且注意到变分δu_k，δa_1是独立的，因此得到：

平衡方程：

$$[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}-u_{k,i})]_{,j}+F_k=0\qquad 在\tau内$$

应力边界条件：

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon^\circ_{ij}}(\delta_{ki}-u_{k,i})n_j-\bar{p}_k=0\qquad 在S_p上$$

以及在x_i坐标系下，问题的精确解必须满足的守恒积分方程：

$$\int_\tau \left[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}^o}\frac{\partial \varepsilon_{ij}^o}{\partial x_1} - F_i\frac{\partial u_i^o}{\partial x_1}\right]d\tau - \int_{S_p} \overline{p}_i \frac{\partial u_i^o}{\partial x_1} dS = 0 \tag{13}$$

去掉上角标"o"，易知问题的实质不变，式(13)可重写为:

$$\int_\tau \left[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} - F_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right]d\tau - \int_{S_p} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}(\delta_{ki} + u_{k,i})n_j\frac{\partial u_k}{\partial x_1} dS = 0 \tag{14}$$

上式即是大位移变形弹性理论的守恒律，当l分别取1，2，3时，它实际上代表三个守恒积分方程。

在小位移变形时，略去$\delta_{ki} + u_{k,i}$中的$u_{k,i}$，式(14)即成为小位移变形弹性理论的守恒律:

$$\int_\tau \left[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} - F_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right]d\tau - \int_{S_p} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS = 0 \tag{15}$$

2 基于余能驻值原理的对偶守恒律

大位移变形的最小势能原理是众所周知的．但有关的余能原理却一直未得到解决．本文采用大位移弹性理论的余能驻值原理[9]来推导大变形弹性体的对偶守恒律。

与上节雷同之处将不再赘述．

状态Ⅰ的余能泛函数为:

$$\prod_{C\mathrm{I}} = \int_\tau \left[B(\sigma_{ij}^o) + \frac{1}{2}u_{k,i}^o u_{k,j}^o \sigma_{ij}^o\right]d\tau - \int_{S_u} \overline{u}_i(\delta_{ik} + u_{i,k}^o)\sigma_{kj}^o n_j dS \tag{16}$$

状态Ⅱ的余能泛函为:

$$\prod_{C\mathrm{II}} = \int_\tau \left[B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right]d\tau - \int_{S_u} \overline{u}_i(\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{kj}n_j dS \tag{17}$$

注意到:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o = \delta\sigma_{ij}(X_1) - \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x_1}\delta a_1$$

$$u_{i,k}\sigma_{kj} - u_{i,k}^o\sigma_{kj}^o = u_{i,k}\delta\sigma_{kj} + \sigma_{kj}\delta u_{i,k} - u_{i,k}\frac{\partial \sigma_{kj}^o}{\partial x_1}\delta a_1 - \sigma_{kj}\frac{\partial u_{i,k}^o}{\partial x_1}\delta a_1$$

$$u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} - u_{k,i}^o u_{k,j}^o\sigma_{ij}^o = u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}u_{k,i}\delta u_{k,j}$$
$$+ \sigma_{ij}u_{k,j}\delta u_{k,i} - u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x_1}\delta a_1 - \sigma_{ij}u_{k,i}\frac{\partial u_{k,j}^o}{\partial x_1}\delta a_1 - \sigma_{ij}u_{k,j}\frac{\partial u_{k,i}^o}{\partial x_1}\delta a_1$$

因此:

$$\triangle\prod_C=\int_\tau[B(\sigma_{ij})-B(\sigma^\circ_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}u^\circ_{k,i}u^\circ_{k,j}\sigma^\circ_{ij}]d\tau$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}-(\delta_{ik}+u^\circ_{i,k})\sigma_{kj}]dS$$

$$=\int_\tau[\frac{\partial B}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\sigma_{ij}u_{k,i}\delta u_{k,j}+\sigma_{ij}u_{k,j}\delta u_{k,i}]d\tau$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\delta[(\delta_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]dS$$

$$-\{\int_\tau[\frac{\partial B}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\ \frac{\partial\sigma^\circ_{ij}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}(u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial\sigma^\circ_{ij}}{\partial x_1}+\sigma_{ij}u_{k,i}\frac{\partial\sigma^\circ_{k,j}}{\partial x_1}+\sigma_{ij}u_{k,j}\frac{\partial u^\circ_{k,i}}{\partial x_1})]d\tau$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j(\frac{\partial\sigma^\circ_{ij}}{\partial x_1}+u_{i,k}\frac{\partial\sigma^\circ_{kj}}{\partial x_1}+\sigma_{kj}\frac{\partial u^\circ_{i,k}}{\partial x_1})dS\}\delta a_1 \tag{18}$$

注意到:

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\delta\sigma_{ij}=\frac{\partial B(\sigma^\circ_{ij})}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\delta\sigma_{ij}=\varepsilon^\circ_{ij}\delta\sigma_{ij}=\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} \tag{19}$$

在上式的最后略去了高阶微量，再由几何关系式(1)，所以:

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+2u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}$$

$$=(u_{i,j}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}=u_{k,i}(\delta_{kj}+u_{k,j})\delta\sigma_{ij}$$

而:

$$u_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j}=u_{k,i}\sigma_{ij}\delta(\delta_{ki}+u_{k,j})$$

所以

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma^\circ_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+u_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j})$$

$$=\{u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]\}_{,i}-u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]_{,i}$$

利用Green公式和式(19)类似的变换，$\triangle\prod_C$可进一步简化为:

$$\triangle\prod_C=-\int_\tau[u_k\delta[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]_{,j}d\tau+\int_S u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]n_i dS$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i\delta[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]n_i dS-\{\int_\tau u^\circ_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_1}[(\delta_{kj}+u^\circ_{k,j})\sigma^\circ_{ij}]d\tau$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\frac{\partial}{\partial x_1}[(\delta_{ki}+u^\circ_{i,k})\sigma^\circ_{kj}]dS\}\delta a_1 \tag{20}$$

当状态Ⅰ、Ⅱ无限接近时，式(18)的$\triangle\prod_C$即$\delta\prod_C$. 由余能驻值原理，问题的精确解应使:

$$\delta\prod_C=0 \tag{21}$$

此时式(20)的右端应等于零。因为u_k，σ_{ij}满足平衡方程:

$$[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]_{,j}+F_k=0$$

所以有:

$$\delta[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]_{,j}=0 \qquad \text{在}\tau\text{内}$$

而在边界S_p上，满足外力已知条件:

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,j})]n_j=\bar{p}_k$$

所以:

$$\delta[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]n_j=0 \qquad \text{在}S_p\text{上}$$

并考虑到变分δa_l是独立的，所以由式(21)有:

$$u_k=\bar{u}_k \qquad \text{在}S_u\text{上}$$

和在x_i坐标系下问题的精确解应满足的守恒积分方程:

$$\int_\tau u_{k,j}\frac{\partial}{\partial x_l}[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]d\tau-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\frac{\partial}{\partial x_l}[(\delta_{ki}+u_{i,k})\sigma_{kj}]dS=0 \tag{22}$$

上式中去掉了上角标“o”，但易知问题的实质不变。

式(22)即是与式(14)对偶的大位移变形弹性理论的守恒律，当l分别取1，2，3时，它实际上也代表三个守恒积分方程。

同理可得小位移变形弹性理论的对偶守恒律:

$$\int_\tau u_{i,j}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_l}d\tau-\int_{S_u}\bar{u}_i n_j\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_l}dS=0 \tag{23}$$

3 守恒律在定义守恒积分中的应用

由式(14)的守恒律和式(22)的对偶守恒律，可以定义断裂理论中的三维守恒积分和对偶守恒积分，这是固体力学守恒律的一个最直接的应用。为了方便仅讨论二维问题。

大变形弹性断裂缝体的二维守恒积分可定义为:

$$J=\int_S\left[\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_1}-F_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right]dS-\int_\Gamma\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}(\delta_{ki}-u_{k,i})n_j\frac{\partial u_k}{\partial x_1}d\Gamma \tag{24}$$

上式中假定裂缝沿x_1轴方向。且Γ是这样定义的：除与裂缝面的交点外，其上的点都属于物体所在区域S，并且包围了裂缝体的裂缝前缘。

我们应注意到，在1、2节的推导中，所讨论的物体，其上各点和内部各点都属于被研究物体所占的空间区域，且都不是裂缝体应力场或应变场的奇异点，因此式(14)和(22)中的空间区域τ是被表面光滑或分片光滑的封闭曲面S所包围的，而$S=S_u+S_p$，对二维问题亦然。

因此，利用守恒积分方程式(14)的二维形式易证．式(24)定义的积分是与所取路径无关的[6, 7, 8]．

在小变形弹性理论中，式(24)成为:

$$J=\int_S\left[\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_1}-F_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right]dS-\int_\Gamma\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x_1}d\Gamma \tag{25}$$

在忽略体力时，上式即是 Rice[3] 的 J 积分．

大变形二维弹性体的对偶守恒积分可定义为:

$$J_C=\int_S u_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_1}[(\delta_{kj}+u_{k,j})\sigma_{ij}]dS-\int_\Gamma\bar{u}_i n_j\frac{\partial}{\partial x_1}[(\delta_{ki}+u_{i,k})\sigma_{kj}]d\Gamma \tag{26}$$

上式的定义同式(24)，利用守恒积分方程式(22)易证式(26)是与路径无关的积分．

在小变形弹性理论中，对偶守恒积分为:

$$J_C=\int_S u_{k,i}\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x_1}dS-\int_\Gamma\bar{u}_i n_j\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_1}d\Gamma \tag{27}$$

上式就是 Bui[5] 讨论的对偶积分．

至此，我们简单讨论了守恒律和对偶守恒律在定义二维守恒积分中的应用．至于他们在固体力学中的其他应用，尚有待于作进一步的研究．

4 结　　语

4．1　本文从大变形弹性理论的变分原理出发，导出了大变形问题的守恒律和对偶守恒律．

4．2　固体力学中守恒律和对偶守恒律的一个直接应用即是定义断裂理论中的守恒积分和对偶守恒积分．

4．3　本文的工作还表明，从熟知的固体力学的各种变分原理可以导出相应的守恒律，从而可定义各种守恒积分．

参　考　文　献

〔1〕李灏等．Noether理论及其在连续介质力学中的应用．近代数学与力学(郭仲衡主编)．北京大学出版社，1987

〔2〕Knowles,J.K., ey al.. On a class of conservation laws in linearized and Finite Elastostatics. Archive for Rat. Mech. and Analysis, 44, 1972, P187—211

〔3〕Rice, J.R.. A Path independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks. J. of Appl. Mech., Vol.35, No.2, 1968, P379—386

〔4〕Fletcher, D.C.. Archive for Rat. Mech. and Analysis, 60, 1976

〔5〕Bui, H.D.. Dual Path-independent Integrals in the Boundary Value Problems of Cracks. Eng. Frac. Mech. Vol.6, No.2, 1974, P287—296

〔6〕牛焱洲，钱济成．弹塑性各向同性损伤介质的守恒积分．应用数学和力学，待刊
〔7〕牛焱洲．弹塑性各向异性损伤介质中的守恒积分方程．郑州工学院学报，Vol.11，No.2，1990
〔8〕牛焱洲．损伤介质中守恒积分的研究．东南大学学报，Vol.20，No.1，1990
〔9〕钱伟长．变分法及有限元(上册)．科学出版社，1980

On Conservative Laws in Large Deformational Elasticity

Niu Yanzhou
(Mid-South Design Institute For Hydroelectric Projects, Changsha, P.R.China)

Abstract: In this paper, from the minimum potential energy principle and the complementary energy stationary principle in large deformational elasticity, the conservative laws and their dual laws are presented. Based on these laws,the consertvative integrals and dual conservative integrals of Fracture Mechanics can be defined easily.

Keywords: elastic theory, elastic bodies, deformation

(上接第91页)

The Practical Power Flow Models of the Automatic Measurement Systems

Liang Wei
(Zhengzhou Light Industry Institute)

Abstract: This paper bring out an idea which is about how to build the practical power flow model of the automatic measurement systems. This idea will make the process of building model more terse, more visualized and more standard. It is more convenient and more practicable for us to analyze the systems. So that we can transform the models to be the state equations and make simulation conveniently.

Keywords: automatic detection, power circuits, modeling