第11卷 第4期 郑州工学院学报 Vol.11 No.4
1990年 12月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Dec. 1990

可靠性方程的解*

陈国勋 闫家杰

(郑州大学计算机系) (郑州工学院数理系)

摘 要：本文通过对方程组(1)的讨论，得到如下两个结果：(i) M^{n-1} 是可靠性矩阵；(ii) 从点 i 到点 j 的可靠性等于 M 关于 (j, i) 的余子式依算子○与○的展开式。这种计算可靠性的方法显然比[3]中的迭代法优越，且更便于在计算机上进行计算。

关键词：通信系统，故障，可靠性

1 问题的提出

一个当前的或计划的通信系统的可靠性确定的问题已在工程上及统计学、运筹学的文献中受到注意[1]。例如，当构成某通信系统的对象发生故障时，由一个已知信息源发出一条信息到达其目标的概率估计具有重要意义，受到人们关注。

设 G=(V, E)是一顶点集为 V、边集为 E 的有向图。顶点无故障，而边故障相互独立，边 e 的可靠性（即边 e 功能的概率）记为 p_e，顶点 S 与 t 分别指定为 G 的源与汇，从 S 到 t 的可靠性（即在 G 中有一条由 S 到 t 的功能路的概率）记为 $R_{st}(G)$。我们的兴趣在于从源 S 到 t 的可靠性 $R_{st}(G)$的计算。

对每条边 k∈E 伴以一变量 x_k，则关于 S 与 t 的可靠性多项式 $F_{st}(X)=F_{st}(x_1, \cdots, x_r)$ 是 $x_1, \cdots, x_r$ 的一个这样的多项式，当用边 k 的可靠性 p_k 代替变量 x_k 时 (k=1, 2, …, r)，则所得之值就是由 S 到 t 的一条功能路的概率。这可靠性多项式可以用定义在多项式集 F 上的两个算子○与○简明地表示出来。

令 $T^a=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_r^{a_r}$ 表示一单项，其中每个 $a_i\in\{0, 1\}$。$T^c \triangleq T^a \bigcirc T^b = x_1^{c_1}x_2^{c_2}\cdots x_r^{c_r}$，$c_i \triangleq \max\{a_i, b_i\} \triangleq a_i \vee b_i$ (i=1, 2, …, r)。对于多项式 f(X)与 g(X)，$f(X)\bigcirc g(X) \triangleq f(X)+g(X)-f(X)\bigcirc g(X)$。

假定 P_{st} 是 G 中由 S 到 t 的简单通路集，定义路 p 的值 V(p)为关于沿这条路的边变

---

* 收稿日期：1989.10.17

量之$\bigcirc$积

$$V(p)=\mathop{\bigcirc}_{k\in P}x_k$$

于是，可靠性多项式$F_{st}(X)$可表示为:

$$F_{st}(X)=\mathop{\boldsymbol{\bigcirc}}_{p\in P_{st}}V(p)$$

以 p_k 代替对应之变量 x_k 得到 $R_{st}(G)$.

有许多方法用来讨论关于在满足适当性质的一般代数结构（F, $\boldsymbol{\bigcirc}$, $\bigcirc$）上的多项式 $F_{st}(X)=\mathop{\boldsymbol{\bigcirc}}_{p\in P_{st}}V(p)$的计算问题（见[2]，[3]），这些方法都可以归结为方程组:

$$Z=(Z\bigcirc M)\boldsymbol{\bigcirc}e_S \tag{1}$$

的求解．其中 $M=(m_{ij})$ 是关于 G 的邻接矩阵，和[3]不同的是这里规定：当 $k\in p(i,j)$ 时，$m_{ij}=x_k\in[0,1]$，$(i\neq j)$，否则，$m_{ij}=0$ $(i\neq j)$，且 $m_{ii}=1$（[3]中规定 $m_{ii}=0$，似乎不太自然，也不便于计算）；e_S 表示第 S 单位行向量；Z 表示未知向量；矩阵之间的$\bigcirc$运算和通常矩阵乘法运算类似，只不过将“+”改为“$\boldsymbol{\bigcirc}$”，将“×”改为“$\bigcirc$”．

方程组(1)的一个（极值）解 Z_j 就是从源 S 到点 j 的可靠性多项式，即 $\forall j\in V$，$Z_j=F_{Sj}(X)$．于是，只要求出方程组(1)的解，即可得到从源 S 到汇 t 的可靠性多项式 $F_{St}(X)=Z_t$，进而求得可靠性 $R_{St}(G)$．并且我们还同时得到从 S 到任一点 $j\in V$ 的可靠性．问题的关键是方程组(1)应如何求解．为此，我们先讨论有关算子$\boldsymbol{\bigcirc}$和$\bigcirc$的一些性质．

2　算子$\boldsymbol{\bigcirc}$和$\bigcirc$的运算性质

设单项 $T^a=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_r^{a_r}$，$T^b=x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_r^{b_r}$，$a_i$，$b_i\in\{0,1\}$，$x_i\in[0,1]$，$(i=1,2,\cdots,r)$．并且规定：$0\bigcirc T^a=0$，$0\boldsymbol{\bigcirc}T^a=T^a$，$1\bigcirc T^a=T^a$，$1\boldsymbol{\bigcirc}T^a=1$．

性质 1：$T^a\bigcirc T^b=T^b\bigcirc T^a$

性质 2：$T^a\boldsymbol{\bigcirc}T^b=T^b\boldsymbol{\bigcirc}T^a$

性质 3：$(T^a\bigcirc T^b)\bigcirc T^c=T^a\bigcirc(T^b\bigcirc T^c)$

性质 4：$T^a\bigcirc T^a=T^a$

由算子$\bigcirc$和$\boldsymbol{\bigcirc}$之规定，以上诸性质显然成立．

性质 5：$T^a\boldsymbol{\bigcirc}T^a=T^a$

事实上，$T^a\boldsymbol{\bigcirc}T^a\triangleq T^a+T^a-(T^a\bigcirc T^a)$

$$=T^a+T^a-T^a=T^a$$

性质 6：$T^a\bigcirc(T^a\bigcirc T^b)=T^a\bigcirc T^b$

这是因为：$T^a\bigcirc(T^a\bigcirc T^b)=(T^a\bigcirc T^a)\bigcirc T^b=T^a\bigcirc T^b$

性质 7：$T^a\boldsymbol{\bigcirc}(T^a\bigcirc T^b)=T^a$

事实上，$T^a○(T^a○T^b)$

$$=T^a+(T^a○T^b)-T^a○(T^a○T^b)$$
$$=T^a+(T^a○T^b)-(T^a○T^b)$$
$$=T^a$$

类似地可以证明以下两条性质:

性质 8: $(T^a○T^b)○T^c=T^a○(T^b○T^c)$

性质 9: $(T^a○T^b)○T^c=(T^a○T^c)○(T^b○T^c)$

这里规定: $(T^a+T^b)○T^c \triangleq T^a○T^c+T^b○T^c$

性质 10: 设 M 为有向图 G 的邻接矩阵,

$$M=(m_{ij}),\quad M^K \triangleq M^{K-1}○M \triangleq (m_{ij}^{(K)})$$

$$m_{ij}^{(K)} \triangleq \bigcirc_{j}(m_{ij}^{(K-1)}○m_{jj}),\quad M^K○M \triangleq (m_{ij}^{(K)}○m_{ij}),$$ 则有:

$$M○M^2○\cdots○M^{n-1}○M^n=M○M^2○\cdots○M^{n-1}$$

证明: $m_{ij}^{(n)} \triangleq \bigcirc_{K_{n-1}}(m_{iK_{n-1}}^{(n-1)}○m_{K_{n-1}j})$

$$=\bigcirc_{K_{n-2},K_{n-1}}(m_{iK_{n-2}}^{(n-2)}○m_{K_{n-2}K_{n-1}}○m_{K_{n-1}j})$$
$$=\cdots$$
$$=\bigcirc_{K_1,\cdots,K_{n-1}}(m_{iK_1}○m_{K_1K_2}○\cdots○m_{K_{n-1}j})$$
$$\triangleq \bigcirc_{K_1,\cdots,K_{n-1}} u$$

其中: $u= \triangleq (m_{iK_1}○m_{K_1K_2}○\cdots○m_{K_{n-1}j})$

因为，i, k_1, …, k_{n-1}, j∈{1, 2, …, n}，所以它们中至少有两个相同.

当$i=j$时，$m_{ij}^{(n)}=m_{ii}^{(n)}=1$. 下边考虑$i\neq j$时的三种情形.

为方便计，我们约定: 若$T^a○T^b=T^b$，则记$T^a\subseteq T^b$

① 当$i=K_s$时:

$$u=m_{iK_1}○m_{K_1K_2}○\cdots○m_{K_{s-1}K_s}○m_{K_sK_{s+1}}○\cdots○m_{K_{n-1}j}$$
$$=m_{iK_1}○m_{K_1K_2}○\cdots○m_{K_{s-1}K_s}○m_{iK_{s+1}}○\cdots○m_{K_{n-1}j}$$
$$\subseteq m_{iK_{s+1}}○\cdots○m_{K_{n-1}j}$$

② 当$j=K_s$时:

类似(1)可得$u\subseteq m_{iK_1}○\cdots○m_{K_{s-1}j}$

③ 当$K_s = K_r$时，$(1 \leqslant r < s \leqslant n)$

$$u = m_{iK_1} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{r-1}K_r} \bigcirc m_{K_rK_{r+1}} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_sK_{s+1}} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{n-1}j}$$

$$= m_{iK_1} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{r-1}K_s} \bigcirc m_{K_rK_{r+1}} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_sK_{s+1}} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{n-1}j}$$

$$\subseteq m_{iK_1} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{r-1}K_s} \bigcirc m_{K_sK_{s+1}} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{K_{n-1}j}$$

综合(1)、(2)、(3)可得:

$$m_{ij}^{(n)} \subseteq m_{ij} \bigcirc m_{ij}^{(2)} \bigcirc \cdots \bigcirc m_{ij}^{(n-1)}$$

故: $M \bigcirc M^2 \bigcirc \cdots \bigcirc M^{n-1} \bigcirc M^n = M \bigcirc M^2 \bigcirc \cdots \bigcirc M^{n-1}$

3 关于方程组(1)的解

由性质10可以证明:

定理1: $\bigcirc_{k=1}^{n-1} M^k$是可靠性矩阵，即它的第i行第j列元素是从点i出发至点j的可靠性多项式。

定理2: 方程组(1)有解

$$Z = \bigcirc_{i=0}^{n-1} (c_s \bigcirc M^i) \tag{2}$$

其中: $M^0 \triangleq E$，E为单位阵。

证明: 把(2)代入(1)的右边得:

$$(Z \bigcirc M) \bigcirc c_s$$

$$= \{[c_s \bigcirc (c_s \bigcirc M) \bigcirc (c_s \bigcirc M^2) \bigcirc \cdots \bigcirc (c_s \bigcirc M^{n-1})] \bigcirc M\} \bigcirc c_s$$

$$= [(M \bigcirc M^2 \bigcirc \cdots \bigcirc M^n) \bigcirc c_s] \bigcirc c_s$$

$$= [(M \bigcirc M^2 \bigcirc \cdots \bigcirc M^{n-1}) \bigcirc c_s] \bigcirc c_s$$

$$= c_s \bigcirc [c_s \bigcirc (M \bigcirc M^2 \bigcirc \cdots \bigcirc M^{n-1})]$$

$$= \bigcirc_{i=0}^{n-1} (c_s \bigcirc M^i)$$

$$= Z$$

性质11: 设$M = (m_{ij})_{n \times n}$，$n \geqslant 2$，$m_{ii} = 1$，$m_{ij} \in [0, 1]$，则$M \subseteq M^2 \subseteq \cdots \subseteq M^{n-1}$。这里规定: $M^k \subseteq M^{k+1}$当且仅当$m_{ij}^{(k)} \subseteq m_{ij}^{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n-2$; $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})$。

事实上: $m_{ij}^{(2)} = \bigcirc_{K_1=1}^{n} (m_{iK_1} \bigcirc m_{K_1j})$

$$= (m_{i1} \circ m_{1j}) \bigcirc (m_{i2} \circ m_{2j}) \bigcirc \cdots \bigcirc (m_{ij} \circ m_{jj}) \bigcirc \cdots \bigcirc (m_{in} \circ m_{nj})$$

$$= (m_{i1} \circ m_{1j}) \bigcirc (m_{i2} \circ m_{2j}) \bigcirc \cdots \bigcirc m_{ij} \bigcirc \cdots \bigcirc (m_{in} \circ m_{nj})$$

$$\supseteq m_{ij} \qquad \text{故有} \quad M \subseteq M^2$$

使用数学归纳法可得：

$$M \subseteq M^2 \subseteq M^3 \subseteq \cdots \subseteq M^{n-1}$$

由性质11及定理1和定理2容易得到：

定理3：M^{n-1}是可靠性矩阵.

定理4：方程组(1)有解

$$Z = e_s \bigcirc (e_s \circ M^{n-1})$$

$$= e_s \circ M^{n-1}$$

后一等式的成立是因为$e_s \bigcirc (e_s \circ M^{n-1}) = e_s \circ (M^0 \bigcirc M^{n-1}) = e_s \circ M^{n-1}$

定理 4 还可进一步改进.

定理 5：方程组(1)的解中 Z_j 恰是 M 的第 j 行第 1 列的元素(j, 1)的余子式依照○与◯的展式. $(j \neq 1)$

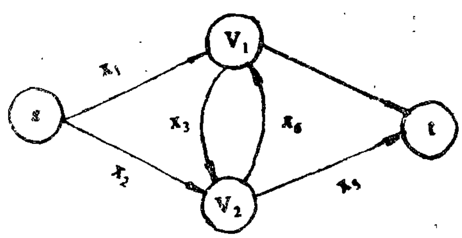
这里所说的余子式与行列式的某元素的余子式概念类似，只不过展开时要把乘积换为○，把（代数）和换为◯。

证明略.

推论：从点 i 到点 j 的可靠性多项式等于 M 的第 j 行第 i 列元素(j, i)的余子式依照○与◯的展开式.

例：标准桥网络如右图

x_i 为对应边的可靠性。此时：



$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & V_1 & V_2 & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_6 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S \\ V_1 \\ V_2 \\ t \end{array}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \bigcirc (x_2 \circ x_6) & x_2 \bigcirc (x_1 \circ x_3) & (x_1 \circ x_4) \bigcirc (x_2 \circ x_5) \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \bigcirc (x_3 \circ x_5) \\ 0 & x_6 & 1 & x_5 \bigcirc (x_4 \circ x_6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M^3 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \bigcirc (x_2 \bigcirc x_6) & x_2 \bigcirc (x_1 \bigcirc x_3) & (x_1 \bigcirc x_4) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_1 \bigcirc x_3 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_4 \bigcirc x_6) \\ 0 & 1 & x_3 & x_4 \bigcirc (x_3 \bigcirc x_5) \\ 0 & x_6 & 1 & x_5 \bigcirc (x_4 \bigcirc x_6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是求得:

$$Z_1 = x_1 \bigcirc (x_2 \bigcirc x_6) \qquad Z_2 = x_2 \bigcirc (x_1 \bigcirc x_3)$$

$$Z_t = (x_1 \bigcirc x_4) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_1 \bigcirc x_3 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_4 \bigcirc x_6)$$

利用$\bigcirc$的定义可得下表:

	F_{sj}	R_{sj} (取 $p_k = p$)
S	1	1
V_1	$x_1 + x_2x_6 - x_1x_2x_6$	$p + p^2 - p^3$
V_2	$x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3$	$p + p^2 - p^3$
t	$x_2x_5 - x_1x_2x_4x_6 + x_1x_2x_4x_5x_6 + x_2x_4x_6 - x_2x_4x_5x_6 + x_1x_4 - x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5$	$2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$

M 关于(t, s)之余子式是:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & x_4 \\ x_6 & 1 & x_5 \end{vmatrix}$$

其展开式为: $(x_1 \bigcirc x_3 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_4 \bigcirc x_6) \bigcirc (x_2 \bigcirc x_5) \bigcirc (x_1 \bigcirc x_4)$

它恰是Z_t.

M关于(t, V_2)的余子式是:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & x_6 & x_5 \end{vmatrix}$$

其展开式为 $x_5 \bigcirc (x_4 \bigcirc x_6)$, 它恰好是上面 M^3 中的元素 $m_{34}^{(3)}$, 即是从 V_2 到 t 的可靠性多项式.

参 考 文 献

〔1〕 C.L.Hwang, F.A.Tillman and M.H.Lee. Systems-reliability evaluation techniques for complex large systems—a review, IEEE Trans Rel., 1981, 30, 416–422

〔2〕 B.Carre. An algebra for network routing problems, J.Inst. Math. Appl., 1971,7, 273–294

[3] D.R.Shier and D.E.Whited. Algebraic methods in network reliability, SIAMJ. Appl. Disc. Math., 1987, 8(2), 251-262

Solution of reliability Equations

Chen Guoxun (ZhengZhou University)　　Yan Jiajie (ZhengZhou Insti. of Tech.)

Abstract: In this paper, we obtain the following two results with the discussion for solution of the equation $Z=(Z\bigcirc M)\bigcirc c_S$:

(i) M^{n-1} is a reliablity matrix;

(ii) the reliability which is from point i to point j is equal to the expansian by operators ○ and **O** on (j, i) complement minor of the matrix M. Obviously, the method that computation of the reliability is superior to iteration method. And it is very easy to computation on computer.

Keywords: communication system, fault, reliability

(上接第 126 页)

The Inquiry about the Method of Sequence dispatching of two Parts Produced in many Equipment

Wang Ke
(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, we supplement the original method of sequence dispateching of two parts produced in many equipment. The original method is improved and generalized.

Keywords: Gantt chart, Production cyale, Production sequence