第11卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.11 No.3
1990年 9 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Sep. 1990

求广义矩阵 A^+ 的电算方法研究*

张 达

(郑州工学院土建系)

摘 要：本文根据矩阵的最大秩分解理论及关于 A^+ 计算方法的相应定理，着重推导了求已知矩阵 A 的最大秩分解 A＝BC 的计算过程，采用 FORTRAN 语言编写了矩阵元素为实数的广义逆矩阵 A^+ 的计算程序．该程序可以计算任意的实数矩阵．计算机可输出：①给定的矩阵 A。②矩阵 A 的最大秩分解 B，C。③所求广义逆矩阵 A^+．

关键词：矩阵，初等变换，最大秩分解，广义逆矩阵 A^+

在矩阵理论的实际应用中，常会遇到不可逆的方阵或矩阵并非方阵的情形。要研究逆矩阵问题就必须将其推广到广义逆矩阵。在现有的矩阵理论中，求广义逆矩阵 A^+ 就有五种方法，而这些方法的求解会涉及到矩阵的初等变换、矩阵乘法、求特征值或正规阵的逆矩阵等问题，计算较繁琐，特别对较大的矩阵（如($A_{m\times n}$ $m>5$, $n>5$) 若用手工计算，工作量大，若有一步差错，则前功尽弃。因此在一定程度上影响了矩阵理论更广泛的应用。为此我们进行了根据矩阵 A 的最大秩分解求广义逆矩阵 A^+ 的电算方法研究。

1 计算方法分析

1．1 基本定理

定理 1：设 A 是 $m\times n$ 矩阵且 $\operatorname{rank}(A)=r>1$，可以通过有限次初等行变换把 A 化为

$$\hat{A}_r=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & (K_1) & & & & (K_2) & & & & (K_r) & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r\text{行} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-r\text{行} \end{array}$$

形状的矩阵。其中 $1<K_1<K_2<\cdots<K_r<n$，＊号表示不一定等于零的元素。$\hat{A}_r$ 的第 K_i

＊收稿日期：1990.04

个列向量为ε_{K_i}。

$$\varepsilon_{K_i}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\quad\leftarrow\text{第}i\text{个分量，}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

定理 2：设 A 是 $m\times n$ 矩阵且 $\text{rank}(A)=r>1$，则 A 可表示为 $m\times r$ 矩阵 B 与 $r\times n$ 矩阵 C 的乘积，其中 $\text{rank}(B)=\text{rank}(C)=r$。这时称 $A=BC$ 为 A 的最大秩分解。

定理 3：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\text{rank}(A)=r>1$，A 的最大秩分解为 $A=BC$，其中 B 是 $m\times r$ 矩阵，C 是 $r\times n$ 矩阵，$\text{rank}(B)=\text{rank}(C)=\text{rank}(A)=r$，则有：

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

以上三定理是本文计算方法的主要理论依据，考虑到计算机程序的特点，本文主要对矩阵的初等变换求其最大秩分解的方法作较为详细的分析。

1．2 算法分析

本文计算广义逆矩阵 A^+ 的步骤为：

①根据定理 1、2 进行行的初等变换求最大秩分解，得 B，C。

②分别求 B^H，C^H。

③求矩阵之积 B^HB，CC^H。

④求逆 $(B^HB)^{-1}$，$(CC^H)^{-1}$。

⑤根据定理 3 连续作矩阵乘法求 A^+。

下面分析求矩阵 A 的最大秩分解推导过程。

设已知矩阵为 A（A 为实数矩阵）：

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{M\times N}$$

且 $\text{rank}(A)=r>1$。进行初等行变换：

为了便于分析，现取 a_{KK} 元素进行分析；如图 1 所示：

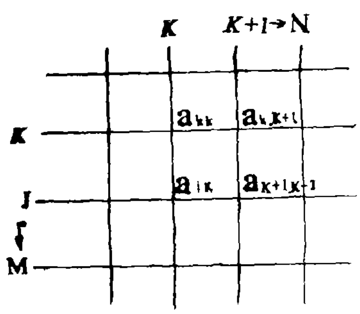

图 1

首先判断 A 的元素 a_{KK} 是否为零元素（$K=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ L,\ L=\min\{M,\ N\}$）。

①若 $a_{KK}\neq0$ 则以 a_{KK}^{-1} 乘第 K 行，再把第 K 行的所有元素分别剩以 $-a_{jK}$（$J=K+1,\ K+2,\ \cdots,\ M$）分别加到 J 行上使得第 K 列中 a_{KK} 以下的所有元素均为 0。

②若 $a_{KK}=0$ 则从第 K 列中找出一个非零元素，并将该非零元素所在的行换至第 K

行，此时$a_{KK}\neq 0$重复①即可使第K列中a_{KK}以下的所有元素为0。

③若$a_{KK}=0$且a_{KK}以下的元素全为0，则从第K+1列第K个元素开始，判断$a_{K\ K+1}$是否为0。

④若$a_{K\ K+1}\neq 0$则以$a^{-1}_{K\ K+1}$乘第K行，并分别用$-a_{j\ K+1}$分别乘以第K行的所有元素，再分别加到第J行（J=K+1，K+2，…，M），使第K+1列中$a_{K\ K+1}$以下的所有元素为0。

⑤若$a_{KK}=0$且a_{KK}以下元素全为0，$a_{K\ K+1}=0$，则在第K+1列中$a_{K\ K+1}$以下的元素中找一个非零元素并将该非零元素所在的行换到第K行，此时$a_{K\ K+1}\neq=0$，重复④即可使第K+1列中$a_{K\ K+1}$以下的所有元素均为0。

上述步骤在计算机程序中按行列进行循环即可得到：

$$\hat{\hat{A}}_r=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccccc} & & & (K_1) & & & & (K_2) & & & (K_r) & & & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc}0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & *\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & *\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & *\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}r\text{行}\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}m-r\text{行}\end{array}$$

其中$1<K_1<K_2<\cdots<K_r<n$，*号表示不一定为零的元素。$\hat{\hat{A}}_r$的第K_i个列向量为：

$$\hat{\varepsilon}_i=\begin{bmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow\text{第}i\text{个分量，}\quad(i=1,2,\cdots,r)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

⑥再利用初等行变换将$\hat{A}_r$中的K_1，K_2，…，K_r个列中*处的非0元素变为0即得：$\hat{A}_r \Longrightarrow \hat{A}_r$

⑦在$\hat{A}_r$中自下而上自左向右寻找，若在第r行中第一次找到非0元素1，则rank(A)=r。

⑧取A中第K_1，K_2，…，K_r列元素作为B的列元素。即得$B_{m\times r}$。

⑨取$\hat{A}_r$前r行元素则构成$C_{r\times n}$，从而得：$A=BC$

由于矩阵乘法、转置、求正规矩阵的逆矩阵是常见的方法，这里不再赘述。

值得说明的是：若所给矩阵A为非奇异方阵，即A为满秩矩阵，可作特殊情况处理。

由于A的满秩矩阵，则A的最大秩分解为B＝A，C为与A对应的单位矩阵。

$$A = BC$$

又∵ $A^{+} = C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$ $(B^{H}B)^{-1} = (B^{-1}(B^{H}))^{-1}$

则: $A^{+} = B^{-1}(B^{H})^{-1}B^{H} = B^{-1}E = B^{-1} = A^{-1}$

从而可知：可逆矩阵A的逆矩阵是广义逆矩阵的特例。

2 程序设计

本程序采用FORTRAN语言编写，在IBM－PC、长城系列微机上使用。

1、源程序中所用符号说明（略）。

2、框图。

3、源程序清单（略）。

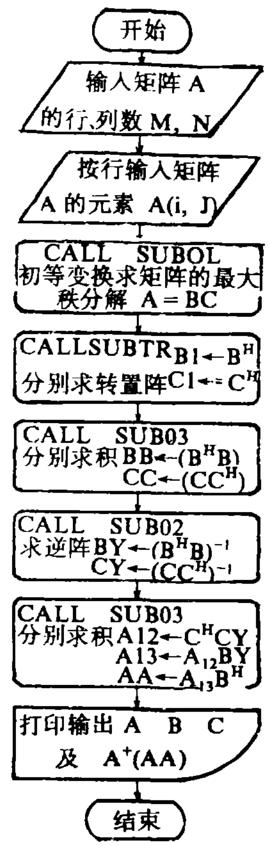

图 2

3 计算实例

矩阵A为:

1.0000	−1.0000	2.0000	3.0000
−1.0000	.0000	−1.0000	.0000
3.0000	2.0000	−1.0000	−6.0000
.0000	−1.0000	1.0000	3.0000
2.0000	2.0000	−2.0000	−6.0000

矩阵A的最大秩分解B为:

1.0000	−1.0000	2.0000
−1.0000	.0000	−1.0000
3.0000	2.0000	−1.0000
.0000	−1.0000	1.0000
2.0000	2.0000	−2.0000

矩阵A的最大秩分解C为:

1.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	−3.0000
.0000	.0000	1.0000	.0000

所求的广义逆矩阵 A^{+} 为:

.3125	.3750	.0625	.6875	.4375
−.0437	−.1125	.0313	−.1563	−.0812
−.0625	−.8750	.1875	−.9375	−.6875
.1313	.3375	−.0938	.4688	.2437

本文仅是将矩阵理论与计算机相结合的一点偿试，从效果来看，可提高计算速度和准

确度，这对深化矩阵理论的研究和推进矩阵理论的广泛应用具有十分重要的意义。

参　考　文　献

〔1〕丁学仁，蔡高厅. 工程中的矩阵理论. 天津大学出版社，1985

〔2〕上海机械学院、安徽省计算中心合编. FORTRAN应用程序库. 上海科技文献出版社，1984

〔3〕段银田等. 实用FORTRAN—77程序设计. 郑州工学院计算中心，1986

〔4〕王松桂. 线性模型的理论及其应用. 安徽教育出版社，1986

Investigation on Computor Calculation Method of Requesting Broad Sense Inverse Matrix A^+

Zhang Da

(ZhengZhou Institute of Technology)

Abstract: Based on the theory of the largest rank breakdown of matrix and the conresponding theeroem on A^+ calulation method, this text specially derives calculation process of requesting the largest rank breakdown $A=BC$ of known matrix A, and uses computor language FORTRAN to compile the calculation program of broad sense inverse matrix A^+ which regards matrix element as real number. This program can calculate any real matrix. The followings can be output from the computor: ① Given matrix A. ② The largest rank breakdown B、C of matrix A. ③ Requesed broad sense inverse matrix A^+

Keywords: matrix, elementary operation, largest rank breakdown, broad sense inverse matrix A^+