第11卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.11 No.1
1990年 3 月 Journal of ZhengZhou Institute of Technology Mar. 1990

相对论性广义 Boltzmann-Hamel 方程*

罗绍凯

(河南商丘师专)

摘 要: 本文从相对论性分析力学的 *D.Alembert* 原理出发，提出相对论性分析力学的普遍中心方程，建立一阶非线性非完整系统坐标形式的相对论性广义 *Boltzmann-Hamel* 方程，并讨论线性系、保守系、完整系和非相对论情况.

关键词: 相对论，非线性非完整系，分析力学

1902 年，德国学者 Boltzmann 导出了准坐标形式的完整系统的运动方程；1904 年，德国又一学者 G.Hamel 推广到一阶线性非完整约束系统的运动方程，并于 1949 年推广到一阶非线性非完整约束系统，得到广义的 Boltzmann-Hamel 方程 [1] 。但是，他们的理论只适用于质点的低速运动情况。

本文在文献[2]、[3]的基础上，从相对论性 D′Alembert 原理 [3]

$$\sum_{i=1}^{n}[-\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i)+\vec{F}_i]\cdot\delta\vec{r}_i=0 \tag{1}$$

$$m_i=\frac{m_{oi}}{\sqrt{1-\dot{\vec{r}}_i^{\,2}/C^2}}$$

出发，提出相对论性分析力学的普遍中心方程，推广广义 Boltzmann-Hamel 方程，使之适用于相对论情况。

1 相对论性分析力学的普遍中心方程

对于几个质点构成的力学体系，在(1)式中作变换:

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i)-m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}(\delta\dot{\vec{r}}_i)$$

$$=\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i)-m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i+m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot[\delta\dot{\vec{r}}_i-\frac{d}{dt}(\delta\dot{\vec{r}}_i)]$$

---

* 收稿日期: 1989.05.12

代入(1)式，构造相对论性广义动能[2][3]*。

$$T^{*}=\sum_{i=1}^{n}m_{0i}C^{2}\left(1-\sqrt{1-\dot{\vec{r}}_{i}^{\,2}/C^{2}}\right) \tag{2}$$

并注意到：

$$\delta T^{*}=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_{i}$$

便是基本形式的相对论性分析力学的普遍中心方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\delta\vec{r}_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i}\cdot\delta\vec{r}_{i}+\delta T^{*}+\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\left[\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_{i})-\delta\dot{\vec{r}}_{i}\right] \tag{3}$$

下面我们把(3)式改写为广义坐标形式。由

$$\vec{r}_{i}=\vec{r}_{i}(q_{\alpha};\ t)\qquad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ S)$$

得：

$$\delta\vec{r}_{i}=\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha},\qquad \frac{\partial\dot{\vec{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}=\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\alpha}} \tag{4}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_{i}=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\delta\dot{q}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_{i}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\right)\delta\dot{q}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\delta q_{\alpha}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i}\cdot\delta\vec{r}_{i}=\sum_{\alpha=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\alpha}}\right)\delta q_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{S}Q_{\alpha}\delta q_{\alpha}$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\left[\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_{i})-\delta\dot{\vec{r}}_{i}\right]=\sum_{i=1}^{n}m_{i}\dot{\vec{r}}_{i}\cdot\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\alpha}}\left[\frac{d}{dt}(\delta q_{\alpha})-\delta\dot{q}_{\alpha}\right]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\left[\frac{d}{dt}(\delta q_{\alpha})-\delta\dot{q}_{\alpha}\right]$$

所以，(3)式可以写为：

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right)=\delta T^{*}+\sum_{\alpha=1}^{S}Q_{\alpha}\delta q_{\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{S}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\left[\frac{d}{dt}(\delta q_{\alpha})-\delta\dot{q}_{\alpha}\right] \tag{5}$$

此即广义坐标形式的相对论性分析力学的普遍中心方程。

2 一阶非线性非完整系的相对论性广义 Boltzmann-Hamel 方程

若系统除受有 h 个完整约束之外，还受有 r 个一阶非线性非完整约束

$$f_{\rho}(q_{\alpha};\ \dot{q}_{\alpha};\ t)=0 \tag{6}$$

$$(\rho=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ S)$$

---

* 在文献[2]、[3]中，把 T^{*} 曾称为伪动能，采纳梅凤翔教授的建议，更名为广义动能。

则$S=3n-h$个广义速度中只有$\varepsilon=S-r$是独立的。

我们先不考虑非完整约束，任取准速度

$$\dot{\pi}_{\alpha}=\dot{\pi}_{\alpha}(q_{\beta};\ \dot{q}_{\beta};\ t)\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ S)$$

则：
$$\dot{q}_{\alpha}=\dot{q}_{\alpha}(q_{\beta};\ \dot{\pi}_{\beta};\ t)\tag{7}$$

因此有：

$$\delta q_{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\dot{q}_{\alpha}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\pi_{\beta}\tag{8}$$

利用(7)式消去T^{*}中的$\dot{q}_{\alpha}$，得到用准速度表示的相对论性简化广义动能：

$$\widetilde{T}^{*}(q_{\alpha};\ \dot{\pi}_{\beta};\ t)=T^{*}[q_{\alpha};\ \dot{q}_{\alpha}(q_{\beta},\ \dot{\pi}_{\beta},\ t);\ t]\tag{9}$$

有：

$$\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\frac{\partial\dot{q}_{\alpha}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\tag{10}$$

$$\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial q_{\alpha}}=\frac{\partial T^{*}}{\partial q_{\alpha}}+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\frac{\partial\dot{q}_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}\tag{11}$$

所以

$$\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\frac{\partial\dot{\pi}_{\alpha}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\tag{12}$$

利用(8)和(10)式，可得：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\delta q_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\dot{q}_{\alpha}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\pi_{\beta}\\&\sum_{\alpha=1}^{s}Q_{\alpha}\delta q_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_{\alpha}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\dot{q}_{\alpha}}{\dot{\pi}_{\beta}}\delta\pi_{\beta}=\sum_{\alpha=1}^{s}P_{\beta}^{*}\delta\pi_{\beta}\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中：

$$P_{\beta}^{*}=\sum_{\beta=1}^{s}Q_{\beta}\frac{\partial\dot{q}_{\beta}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}$$

又：
$$\delta T^{*}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\delta\dot{q}_{\alpha}+\frac{\partial T^{*}}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial\dot{q}^{\alpha}}{\partial q_{\beta}}\delta q_{\beta}+\frac{\partial\dot{q}^{\alpha}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\dot{\pi}_{\beta}\right)$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^{*}}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\dot{\pi}_{\beta}+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial q_{\beta}}\delta q_{\beta}$$
$$=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\dot{\pi}_{\beta}+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^{*}}{\partial\pi_{\beta}}\delta\pi_{\beta}=\delta\widetilde{T}^{*}\tag{14}$$

利用交换关系式：

$$\frac{d}{dt}(\delta\pi_{\alpha})-\delta\dot{\pi}_{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\dot{\pi}_{\alpha}}{\partial\dot{q}_{\beta}}\left[\frac{d}{dt}(\delta q_{\beta})-\delta\dot{q}_{\beta}\right]+\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_{\alpha}}{\partial\dot{q}_{k}}-\frac{\partial\dot{\pi}_{\alpha}}{\partial q_{k}}\right)\frac{\partial\dot{q}_{k}}{\partial\dot{\pi}_{\beta}}\delta\pi_{\beta}$$

可得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}[\frac{d}{dt}(\delta q_\beta)-\delta\dot{q}_\beta]=\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\alpha}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_\beta}[\frac{d}{dt}(\delta q_\beta)-\delta\dot{q}_\beta]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\beta}[\frac{d}{dt}(\delta\pi_\alpha)-\delta\dot{\pi}_\alpha]-\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\alpha}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\beta}\delta\pi_\beta) \quad (15)$$

把(13)、(14)、(15)式代入(5)式，便得:

$$\sum_{\beta=1}^{s}[\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\beta}-\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\pi_\beta}-P_\beta^*+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\alpha}\sum_{k=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\beta}]\delta\pi_\beta) \quad (16)$$

注意到非完整约束条件，取:

$$\dot{\pi}_{\varepsilon+\rho}=f_\rho(q_\alpha;\ \dot{q}_\alpha;\ t)=0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ \varepsilon=S-r) \quad (17)$$

则: $\delta\pi_{\varepsilon+\rho}=0$

故(16)式中$\delta\pi_\beta$只剩下独立的$\delta\pi_\sigma$ ($\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon$)，从而可得一阶非线性非完整系统准坐标形式的相对论性广义Boltzmann－Hamel方程。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}\sum_{k=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\sigma}]=P_\sigma^* \quad (18)$$

$$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$$

3 讨　　论

方程(18)具有普遍意义，对于线性系、保守系和完整系都适用。

3.1 线性系:

若系统受到的非完整约束是一阶线性的，约束方程为:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\pi}_\alpha&=\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta+a_{\alpha,S+1}\\ \dot{q}_k&=\sum_{k=1}^{s}b_{k\beta}\dot{\pi}_\beta+b_{k,S+1}\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ S) \quad (19)$$

则: $\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}=a_{\alpha\beta}$, $\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=b_{k\sigma}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial t}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_\beta}(\sum_{m=1}^{s}b_{\beta m}\dot{\pi}_m+b_{\beta,S+1})+\frac{\partial a_{\alpha,K}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k}\dot{q}_\beta+\frac{\partial a_{\alpha,S+1}}{\partial q_k}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k}(\sum_{m=1}^{s}b_{\beta m}\dot{\pi}_m+b_{\beta,S+1})+\frac{\partial a_{\alpha,S+1}}{\partial q_k}$$

于是有:

$$\sum_{k=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\pi_\sigma}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{m=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_\beta}-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k})b_{\beta m}b_{k\sigma}\dot{\pi}_m+\sum_{k=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_\beta}$$

$$-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k})b_{\beta,S+1}b_{k\sigma}+\sum_{k=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha\sigma}}{\partial t}-\frac{\partial a_{\alpha,S+1}}{\partial q_k})b_{k\sigma}$$

交换下标β、k，将m换为t，则：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\beta}=\sum_{t=1}^{s}\gamma_{t\sigma}^{\alpha}\dot{\pi}_t+\varepsilon_\sigma^\alpha\\&\gamma_{t\sigma}^{\alpha}=\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k}-\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_\beta})b_{ktm}b_{\beta\sigma}\\&\varepsilon_\sigma^\alpha=\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_k}-\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_\beta})b_{k,S+1}+\sum_{\beta=1}^{s}(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}-\frac{\partial a_{\alpha,S+1}}{\partial q_\beta})b_{\beta\sigma}\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

注意到$\dot{\pi}_{\varepsilon+\rho}=0$，故(20)式中下标$t$由1至ε，则：

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\alpha}\sum_{K=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\sigma}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\alpha}(\sum_{t=1}^{s}\gamma_{t\sigma}^{\alpha}\dot{\pi}_t+\varepsilon_\sigma^\alpha)$$

于是(18)式化为一阶线性非完整系的相对论性广义Boltzmann－Hamel方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{T}^*}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}(\sum_{t=1}^{s}\gamma_{t\sigma}^{\alpha}\dot{\pi}_t+\varepsilon_\sigma^\alpha=P_\sigma^*\tag{21}$$

$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$

3．2　保守系：

对于保守系，势能V只是坐标的函数，有：

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\dot{\pi}_\alpha}=0,\qquad P_\sigma^*=-\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\pi_\sigma}$$

则(18)、(21)式分别化为一阶非线性和线性非完整保守系的相对论性广义Boltzmann－Hamel方程。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\pi}_\sigma}\sum_{k=1}^{s}(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\dot{\pi}_\alpha}{\partial q_k})\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\dot{\pi}_\sigma}]=0\tag{22}$$

$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_\sigma}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{\pi}_\sigma}(\sum_{t=1}^{s}\gamma_{t\sigma}^{\alpha}\dot{\pi}_t+\varepsilon_\sigma^\alpha=0\tag{23}$$

$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$

其中$\widetilde{L}=\widetilde{T}^*-\widetilde{V}$为仅用准坐标和准速度表示的相对论性简化Lagrange函数。

3．3　完整系：

若系统只受完整约束，则各广义坐标都是独立的，各约束方程都是可积分的，方程(18)、(21)、(22)和(23)均为完整系的相对论性 Lagrange 方程[2]。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\tag{24}$$

$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$

或：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$ (25)

$(\alpha=1,2,\cdots,s)$

其中 $L=T^*-V$ 为系统的相对论性 Lagrange 函数。

4 结　论

本文的主要结论为(2)、(3)、(5)、(18)、(21)、(22)、(23)、(24)和(25)式。

在$|\dot{\vec{r}}_i|<<C$的经典近似下，取$\sqrt{1-\dot{\vec{r}}_i^2/C^2}$展开式的前两项，则：

$$T^*=\sum_{i=1}^{n}m_{oi}C^2-\sum_{i=1}^{n}m_{oi}C^2\left(1-\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2C^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_{oi}\dot{\vec{r}}_i^2=T$$

化为经典动能函数，本文的相对论性方程均化为经典分析力学方程，(18)和(21)式即回到文献[1]的经典 Boltzmann−Hamel 方程。

参 考 文 献

〔1〕 G.Hamel, Theoretische Mechanik, Berlin, S−V, 1949
〔2〕 罗绍凯．相对论性分析力学理论．高等教育出版社．教材通讯，1987年第5期
〔3〕 罗绍凯．相对论性广义Чаплыгин方程．新疆大学学报，5(4)，1988

Relativistic Generalized Boltzmann−Hamel Equations

Luo Shaokai
(Shangqiu Teacher's College, Henan Province, China)

Abstract: This paper presents the centre equation of relativistic analytical mechanics,from relativistic D,Alembert's principle. It also sets up relativistic generalized Boltzmann−Hamel equations of false−coordinates form of 1−order nonlinear nonholonmic constraints system. Finally, the author disscusser relativistic equations of linear ayatem, conservitive system and holonomic system.

Keywords: relativity, nonlinear nonholonomic system, analytical mechanics