

# 空间角度自动计算的方案设计\*

孙伯鲁

(机械工程系)

**摘要:** 本方案完全采用画法几何学的方法,建立了平面“分区”的理论;找出了平面内不同区间的直线所遵循的普遍规律,并建立了相应的通用数学模型。以此模型为基础,推广到用于解决一切空间角度的自动计算问题。通过对大量空间角度的自动计算和自动绘图检验,证明了方案具有简便、精确和通用的特点。解决了当前无法系统利用计算机自动求解空间角度的困难,为工程实际中计算复杂的空间角度提供了方便。

**关键词:** 空间角度,走向,亲似对应

空间角度问题是直线、平面间相关的一个度量问题,又是一个彼此间的定位问题。在天文、航海、晶体学科,尤其是机械工程中有着广泛的应用。虽然一切三维空间的角度确定都可转化为二维的平面角来求解,但因空间关系复杂,变化繁纷,建立通用的数学模型十分困难,从而阻碍了计算机在这一领域中的应用。

尽管画法几何学是解决空间问题的最佳方法,因其图解精度低(只能用手绘),而图算结合的计算方法又很繁琐,所以近几年来,国内外同行纷纷用画法几何学以外的方法,如空间解析几何、球面三角、极射赤平投影法等去寻求简便、准确的答案。但迄今为止,还没有一种方法可以系统利用计算机去解决问题,所得结果均不理想。

笔者曾于1984年在本刊发表了《平面内直线位置的规律性》一文,就能否利用画法几何学的方法解决这一难题,进行了探索。因限于当时的条件和水平,文中只能予见到平面内直线位置变化的趋势及估计的变化曲线特点。近几年来,经过计算机的计算和自动绘图机的绘图验证,完全证实了当初的设想,并展现了极为丰富的内涵。从而导致了建立完善的求解一切空间角度的数学模型群,且已反复经过计算机运行通过。初步奠定了系统地运用计算机自动求解空间角度的基础。

现将通用几何模型和函数关系式建立的总构思作系统介绍。

## 1 关于通用数学模型

\* 收稿日期: 1989.03.26

1.1 预备知识

具有同一方位参数的直线和平面，在空间可能占据四个不同的位置，例如用直线、平面对参考系的倾角来表示其空间方位时，就是这样。我们用“走向”来区分它们的位置特点。关于各种位置“走向”的命名，可参看[1]、[3]。为了便于讨论问题，列表1，备文中及今后讨论时使用。表中“各走向间关系”一栏，系指两相关几何元素间的关系，如两条完全型上行线之间属“同型同向”关系。等等。

表1

序号	走向	直 线	平 面	各走向间关系		
1	完全型上行			同型同向	同型反向	反型同向
2	完全型下行			同型同向	同型反向	反型同向
3	不完全型上行			同型同向	同型反向	反型同向
4	不完全型下行			同行同向	同行同向	同行同向

### 1.2 函数关系式的建立

1.2.1 一切空间角度问题均可归结为平面角, 故我们从讨论平面内直线的位置特点入手, 加以分析。

平面内可以作出无穷多条直线, 从表面上看, 这些直线的走向是杂乱无章的。经过微观分析发现, 它们的走向是有规律的, 这个规律与直线在平面内所处的区间有关。

平面可被面内侧平、水平及正平线划分为三个区间。在同一区间内的直线具有相同的走向和遵循相同的函数关系<sup>(3)</sup>。

这一平面分区的原理, 是建立通用数学模型的重要基础。它为我们找到平面内直线位置的分布规律, 提供了几何依据。

### 1.2.2 各区间函数关系式的推导

对于四个不同走向的平面, 其处在同一区间内的直线的走向也不同, 详见[1], 但它们有一个共性, 即: 遵循相同函数关系的制约。

现以处在平面内第 I 区间的直线为例, 讨论直线的投影角和平面的迹线角间函数关系的推导过程。设已知平面 Q 及面内直线 AB (参看图 1) :

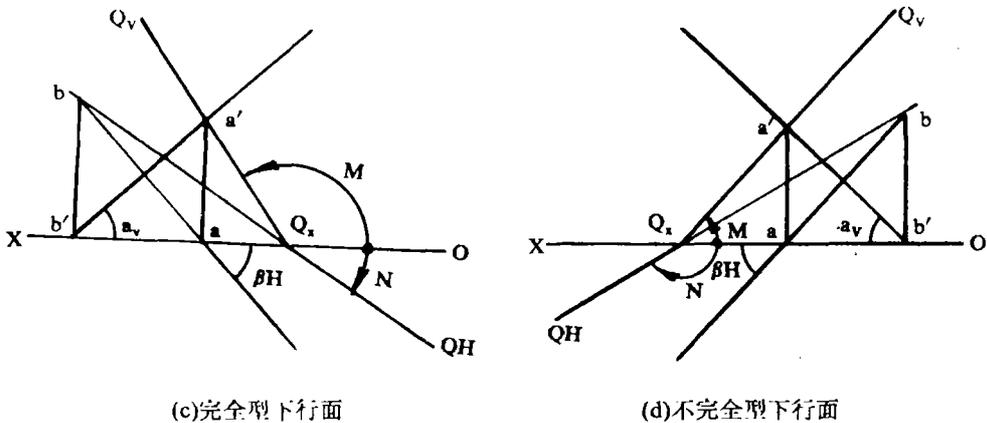
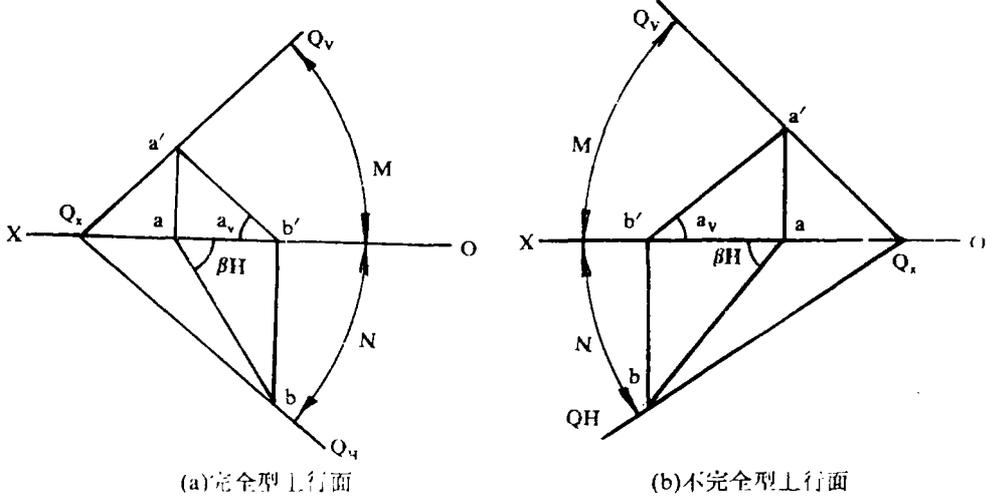


图 1 各走向平面内第 I 区间的直线位置特点

M—平面 Q 的 V 面迹线角;  
 N—平面 Q 的 H 面迹线角;  
 R—平面 Q 的 W 面迹线角 (图中未显示);  
 $\alpha_v$ —直线 AB 的 V 面投影角;  
 $\beta_H$ —直线 AB 的 H 面投影角;  
 $\alpha_w$ —直线 AB 的 W 面投影角 (图中未显示)。

图 1 中(a)~(d)各图显示了四个不同走向平面内处在第 I 区中的直线位置特点, 由任一个图可得到如下的关系:

$$ab' \cdot \operatorname{tg} \beta_H = Q_x b' \cdot \operatorname{tg} N \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \beta_H}{\operatorname{tg} N} = \frac{Q_x b'}{ab'}$$

根据分比定律:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_H - \operatorname{tg} N}{\operatorname{tg} N} = \frac{Q_x b' - ab'}{ab'} = \frac{Q_x a}{ab'} \quad (1)$$

$$\text{又: } ab' \cdot \operatorname{tg} \alpha_v = Q_x a \cdot \operatorname{tg} M \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_v}{\operatorname{tg} M} = \frac{Q_x a}{ab'} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式得:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_H - \operatorname{tg} N}{\operatorname{tg} N} = \operatorname{tg} \alpha_v / \operatorname{tg} M$$

整理上式得:

$$\operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N = \operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} \beta_H - \operatorname{tg} N \cdot \operatorname{tg} \alpha_v \quad (3)$$

(3)式为直线投影角与平面迹线角间的基本函数关系式。

当已知平面, (3)式表示了平面内处在第 I 区间的直线两投影角间的函数关系;

当已知直线 AB 的两投影角, 则(3)式表示了过已知直线所作平面的两迹线角间的函数关系。

同理, 还可推出另两个区间内的函数关系式:

对于第 II 区有:

$$\operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N = \operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} \beta_H + \operatorname{tg} N \cdot \operatorname{tg} \alpha_v \quad (4)$$

对于第 III 区则有:

$$\operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N = \operatorname{tg} N \cdot \operatorname{tg} \alpha_v - \operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} \beta_H \quad (5)$$

### 1.2.3 派生关系式的系列

由上述基本关系式可导出一系列派生关系式。用于解决各种空间角度的计算和图解问题。

现举几例: (以式(3)为基础)。

①直线对投影面的倾角  $\alpha$ 、 $\beta$  的求解:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_v \cdot \operatorname{Cos} \beta_H = \operatorname{tg} M \left( \frac{\operatorname{Sin} \beta_H}{\operatorname{tg} N} - \operatorname{Cos} \beta_H \right)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_H \cdot \operatorname{Cos} \alpha_v = \operatorname{tg} N \left( \operatorname{Cos} \alpha_v + \frac{\operatorname{Sin} \alpha_v}{\operatorname{tg} M} \right)$$

⑥ 平面对投影面的倾角  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$  的求解:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} M}{\operatorname{Sin} N}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} N}{\operatorname{Sin} M}$$

⑦ 平面内与投影面为等倾角的直线的求解:

⑧ 该直线具有  $\alpha_v = \beta_H$  的特点, 可得:

$$\operatorname{tg} \alpha_v = \operatorname{tg} \beta_H = \frac{\operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N}{\operatorname{tg} M - \operatorname{tg} N}$$

### 1.3 基本关系图象的动态显示和图解

根据上述的基本关系式, 可通过计算机处理, 在屏幕或自动绘图机上形象地显示其变化态势的图象, 如图 2。图中任一投影曲线上的任一个点代表了面内一条直线的两个投影角, 曲线直观地描绘了平面内所有直线任意两个投影角间的函数关系。

这些图象还可用来图解求出复杂的空间角度问题, 如图 3、5。

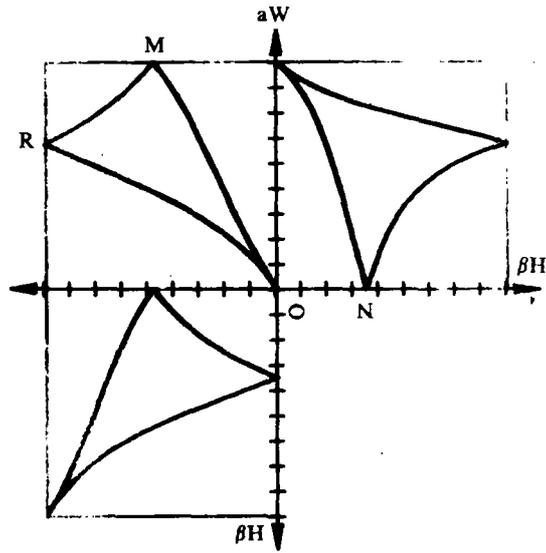


图 2 面内线三投影角间函数关系曲线(三投影)

## 2 数学模型的功能

利用本方案所建立的数学模型, 几乎可解决所有的空间角度问题, 现摘其主要的功能罗列如下:

- ① 平面内任意直线三投影角、三倾角间的函数关系曲线的自动描绘, 如图 2;
- ② 平面内取线作图的自动求解;
- ③ 平面对投影面倾角的自动求解;
- ④ 过已知直线所作任意平面三迹线角、三倾角间函数关系曲线的自动描绘;
- ⑤ 平面成亲似对应的两投影间一对主方向的自动定量和图解, 如图 5;
- ⑥ 平面成亲似对应的两投影间一对合同方向的自动定量和图解;
- ⑦ 已知两平面交线及夹角的自动求解, 如图 3;
- ⑧ 已知两直线所定平面迹线角的自动求解;
- ⑨ 任意已知两直线夹角的自动求解;
- ⑩ 一般位置角度反映实形的自动定位, 等等。

上述功能均经自动计算和自动绘图检验。

### 3 应用实例

为了说明方案的通用性和正确性, 现举两例, 分别从自动计算和自动图解两方面加以印证.

#### 3.1 自动求解两平面交线的分析

##### 3.1.1 解析定量关系式

①参与相交的两平面, 依它们各自走向的不同, 彼此间可能有四种不同的相对位置关系:

- a)、同型同向;      b)、同型反向;  
c)、反型反向;      d)、反型同向, 参看图4.

②交线只有一条, 应同时属于甲(Q)、乙(P)两平面. 交线相对每一个平面, 属于一个确定的区间.

设P、Q两平面的交线对于Q平面属于I区, 对P平面属于III区, 则根据基本关系式可得:

$$\operatorname{tg}M_q \cdot \operatorname{tg}N_q = \operatorname{tg}j_{\beta H} \cdot \operatorname{tg}M_q - \operatorname{tg}j_{\alpha V} \cdot \operatorname{tg}N_q \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}M_p \cdot \operatorname{tg}N_p = \operatorname{tg}j_{\alpha V} \cdot \operatorname{tg}N_p - \operatorname{tg}j_{\beta H} \cdot \operatorname{tg}M_p \quad (7)$$

两式中平面的迹线角 $M_q$ 、 $N_q$ 、 $M_p$ 、 $N_p$ 为已知;  $j_{\alpha V}$ 、 $j_{\beta H}$ 为P、Q两平面交线的投影角, 为未知数.

求(6)、(7)两联立方程的解, 可得出:

$$\operatorname{tg}j_{\alpha V} = \frac{\operatorname{tg}M_q \cdot \operatorname{tg}M_p (\operatorname{tg}N_q + \operatorname{tg}N_p)}{\operatorname{tg}M_q \cdot \operatorname{tg}N_p - \operatorname{tg}M_p \cdot \operatorname{tg}N_q} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}j_{\beta H} = \frac{\operatorname{tg}N_p \cdot \operatorname{tg}N_q (\operatorname{tg}M_p + \operatorname{tg}M_q)}{\operatorname{tg}M_q \cdot \operatorname{tg}N_p - \operatorname{tg}M_p \cdot \operatorname{tg}N_q} \quad (9)$$

上述两式为求解两平面交线的关系式. 该关系式的建立和应用, 远比用空间解析几何等方法简便得多.

##### 3.1.2 动态显示和图解

两平面交线除可用上述关系式计算定量外, 还可通过自动绘图图解求出. 但这里所讨论的图解方法不是采用投影图, 故与传统的方法完全不同, 其依据原理是利用轨迹扫描, 交轨法找出交线的三投影角或三倾角. 其原理是:

①交线同时属于两平面, 它应分别遵循甲、乙两平面内任意直线三投影角间的规律关系.

②分别画出甲、乙两平面内任意直线三投影角间的函数关系曲线, 则两曲线对应交点即为所求交线的投影角值;

③两条曲线一般有四个交点, 可应用统计的方法, 进行自动检索, 确定所要的答案.

图3为求两平面交线投影角的图解过程, 实线代表甲(Q)平面、虚线代表乙(P)平面.

如果将由(8)、(9)两式所计算的结果画入图3中, 则与对应曲线段的交点完全吻合(如图中各投影内曲线对应交点间的连线 $jj''$ , 是由计算结果画入的), 这就相互验证了彼此的正确性。

还可用传统的在投影图中求解交线的投影角的方法, 如图4, 从第三方面进行检验, 所得结果也完全一致。

表2内的数据 $J_{\alpha V}$ 、 $J_{\beta H}$ 系由计算所得交线的投影角, 可以看出, 其精度是相当高的, 这是任何其它方法所无法比拟的。

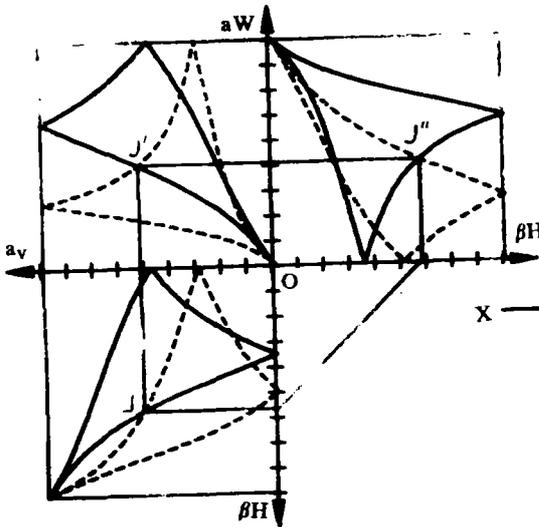


图3 两平面交线投影角的图解

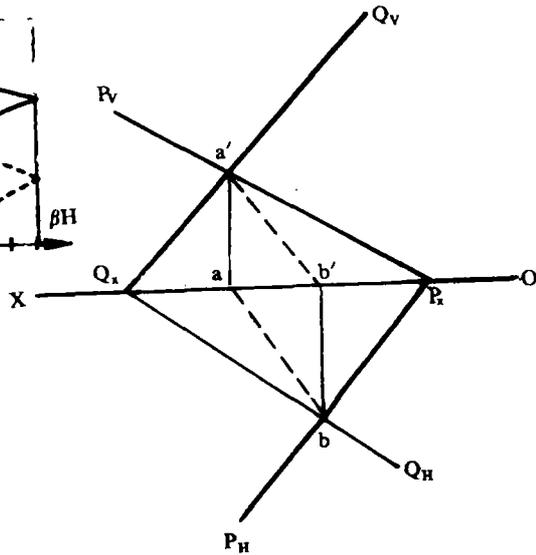


图4 利用投影图求解两平面交线

表2 两平面交线投影角计算数据

$M_p = 150^\circ$	$M_Q = 48^\circ$	$J_{\alpha V} = 127.1545^\circ$
$N_p = 130^\circ$	$N_Q = 35^\circ$	$J_{\beta H} = 56.8691^\circ$
$R_p = 25.848^\circ$	$R_Q = 57.7698^\circ$	$\theta = 114.3969^\circ$

注:  $J_{\alpha V}$ -交线V投影 $a'b'$ 与 $ox$ 轴之夹角, 逆时针计大小;

$J_{\beta H}$ -交线H投影 $ab$ 与 $ox$ 轴之夹角, 顺时针计大小;

$\theta$ -两平面之夹角。

### 3.2 自动求解平面成亲似对应的两投影间的一对主方向的分析

迄今为止, 主方向投影角的求解, 只能用综合法(完全不用数的概念)靠直尺圆规手工绘图进行, 其结果可想而知。

如果使用笔者所确立的数学模型, 则完全可用代数的方法, 准确进行定量, 大大提高其精确度和实用价值。

#### 3.2.1 解析定量关系式

也是根据平面内直线“分区”的原理导出的:

①主方向系指平面内两投影同时垂直的“直线对”所表示的方向<sup>(2)</sup>，据此，它们的投影角间具有：

$$\alpha_{v_1} + \alpha_{v_2} = 90^\circ \quad (11)$$

$$\text{和 } \beta_{H_1} + \beta_{H_2} = 90^\circ \quad (12)$$

②由定义，一对主方向应分别处在平面内的 I、III 两区内。

对于 I 区内的主方向，有：

$$\text{tg}M \cdot \text{tg}N = \text{tg}M \cdot \text{tg}\beta_{H_1} - \text{tg}N \cdot \text{tg}\alpha_{v_1} \quad (13)$$

而对于 III 区内的主方向则有：

$$\text{tg}M \cdot \text{tg}N = \text{tg}N \cdot \text{tg}\alpha_{v_2} - \text{tg}M \cdot \text{tg}\beta_{H_2} \quad (14)$$

由(11)~(14)式可导出以下函数关系：

设： $\text{tg}M = A$ ， $\text{tg}N = B$

则有：

$$A \cdot B^2 \cdot \text{tg}^2\alpha_{v_1} + (A^2 + A^2 \cdot B^2 - B^2) \cdot \text{tg}\alpha_{v_1} - A \cdot B^2 = 0 \quad (15)$$

显然(15)式为一个以 $\text{tg}\alpha_{v_1}$ 为变量的一元二次方程。从中可解出 $\alpha_{v_1}$ ，其余未知数随之得解。

(15)式可以看作是求解主方向的基本关系式。这个关系式的导出，是建立在平面内直线“分区”原理的基础上的。

### 3.2.2 主方向的动态显示和图解

和自动求解两平面的交线的道理一样，主方向也可通过计算机显示和绘制曲线图解求出。现根据它的特点补充说明如下：

①分别画出平面内任意直线三投影角间的函数关系曲线（图5中的实线）和与之互余的曲线（图5中的虚线）。

②两条曲线在 I、III 区段上的两个交点，即为图解的结果。

③如果将由(11)~(14)式所求得的结果画入图5中，则与两曲线的交点完全吻合，见图中的 $Z_1$ 、 $Z_3$ 等。

④用综合法求得的主方向也与计算、自动图解的结果一致，如图6。

表3 主方向投影角计算数据

$M = 45^\circ$	$Z_{\alpha v_1} = 163.155^\circ$	$Z_{\alpha v_3} = 73.155^\circ$
$N = 30^\circ$	$Z_{\beta H_1} = 36.94894^\circ$	$Z_{\beta H_3} = 126.94894^\circ$
$\lambda = 1.732051$	$Z_{\alpha w_1} = 21.92688^\circ$	$Z_{\alpha w_3} = 68.07312^\circ$

注： $\lambda$ —仿射比。

$Z_{\alpha v_1}$ 、 $Z_{\alpha v_2}$ ……—主方向的投影角。

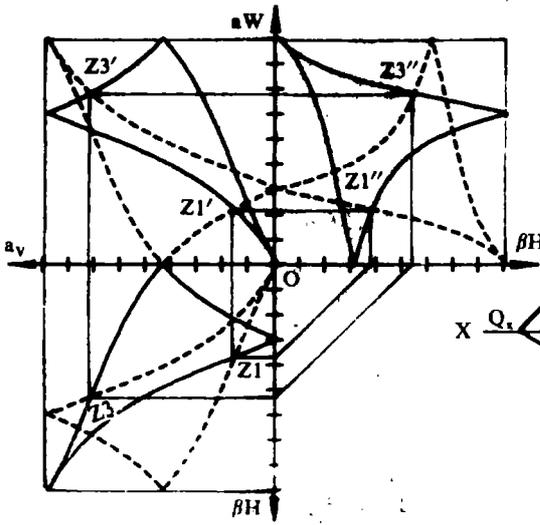


图5 主方向投影角的图解

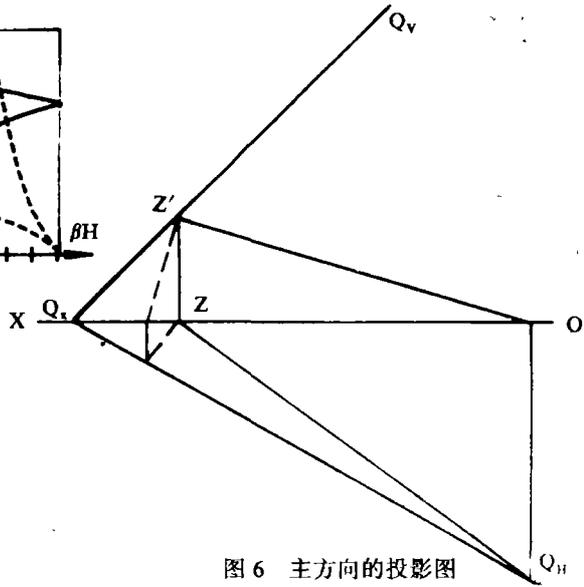


图6 主方向的投影图

### 4 结束语

自动计算空间角度只有应用计算机才能实现, 而系统利用计算机完成这一任务的关键是建立通用的数学模型。

由于一切空间角度的求解均可转化为平面内的角度来进行。故归根结底是解决平面内直线的相关角度问题。文中通过建立平面内直线“分区”的理论, 找出了确定数学模型的几何依据, 为导出通用的数学模型打下了基础。

文中利用分区规律性的原理, 举例说明了建立求解各种复杂角度计算的解析关系式的方法。这些关系式有的是其它任何方法都无法导出的(如求主方向); 有的则是远比本方案要繁琐。所以方案本身具有通用、简便和精确的特点。据此所编制成的软件, 将大大便利于生产和设计中使用。

### 参 考 文 献

- (1) 孙伯鲁. 平面内直线位置的规律性. 郑州工学院学报, 1984, 5(1): 79
- (2) H.Φ. 切特维鲁新. 射影几何学. 高等教育出版社, 1955
- (3) 孙伯鲁. 线面相关角度计算机辅助求解. 中国工程学会1988年学术会宣读论文集, 311, (下册)

## Design of Space Angle Automatic Calculation Scheme

Sun Bolu

(ZhengZhou Institute of Technology)

**Abstract:** By completely using the method of descriptive geometry, in this scheme, the theory of plane area-sharing is set up. The paper finds out the common law which lines in different areas on the same plane obey, and also, establishes general mathematic model relevant. Based on this model, it is generated to automatic calculation of solving all space angle problems. By having used computer calculation and illustration of automatic graph plotter to test plenty of space angles, the scheme proved to have the feature of simple, convenient, precision and general. It solves the difficulty that we can not solve space angle problems by using computer systematic at present, and offers convenience in calculating complex space angles in engineering.

**Keywords:** Space angle, Walking-direction, Perspectively affine correspondenc