第10卷 第3期　　郑　州　工　学　院　学　报　　VOL.10 NO.3
1989年 9 月　　J. ZhengZhou Inst. of Technol.　　sept.　1989

中子在引力场中干涉效应的量子理论相移

陈江川　　李燕燕

（郑州工学院数力系）　（河南省商业干部学校）

提　要　本文通过求解中子在地球引力场中的量子力学运动方程的方法，导出了中子在地球引力场中干涉效应（COW实验）的相移公式，这样就在严格的量子理论基础上完善了COW实验结果分析。根据相移公式是Schreding er方程的解，本文指出该形式的相移公式只适用于中子以非相对论速度入射的情况。

关键词： 引力，量子，相移，COW实验

1　引　言

中子束在地球引力场中的干涉实验（COW实验）[1]，在实验室中显示了引力量子效应。中子干涉仪的基本形式如图一所示，它是由一个完整的硅晶体切割而成的。

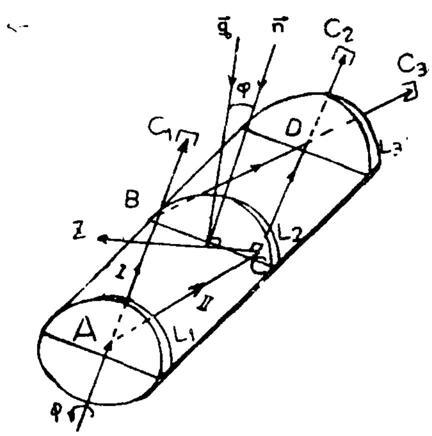

图1　中子干涉仪结构

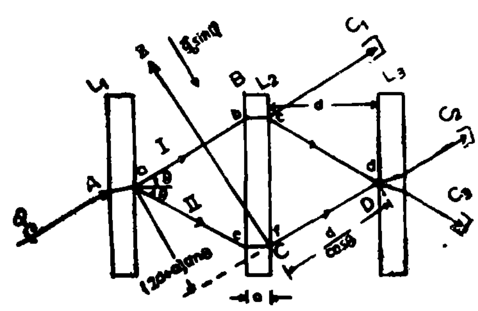

图2　干涉仪中子流路径示意图

图2是干涉仪中子流路径原理图，L_1，L_2，L_3是在一个硅晶体上的三块晶片，一束单色中子流沿水平方向入射到L_1上，由于晶体布喇格反射作用，中子束被分成两束相干的中子流Ⅰ和Ⅱ，θ是布喇格角。Ⅰ与Ⅱ在L_2上又分别被分成两束相干中子流，其中的两束在L_3上

重新叠加在一起。由于Ⅰ、Ⅱ经过的路径中地球引力场势的不同，它们的de Broglie波就产生了不同的相移，在L_3上这两束位相差为β的相干中子流叠加在一起就产生干涉条纹，探测器C_2与C_3探测到的中子流强度就有差别。干涉仪绕入射束转动，改变了路径Ⅰ、Ⅱ的引力势场，能从C_2、C_3测量到干涉条纹的移动。C_1用来探测无干涉时的中子流强，以与C_2、C_3结果比较。文献〔1〕从物理直观上推导了中子束的相移公式，文中将中子在地球引力场中运动的哈密顿量代入经典力学正则方程：

$$\dot{\vec{r}}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\quad,\qquad \dot{\vec{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

解出正则动量$\vec{p}$和它的导数$\dot{\vec{p}}$，然后由此导出中子的牛顿运动方程：

$$m\ddot{\vec{r}}=m_g g_0-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2m\vec{\omega}\times\vec{r}$$

式中m是中子惯性质量，m_g是中子引力质量，$\vec{r}$是地心到中子矢径。由上式可导出：

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2+\frac{1}{3}t^3\vec{\omega}\times\vec{g}$$

其中$\vec{v}_0$是中子入射速度。中子物质波的德布罗意关系为：

$\vec{p}=h\cdot\vec{k}$，$E=h\omega$　　　　（注：h代表h／2π，下同）

于是由引力产生的相移可写成：

$$\beta=\frac{1}{h}\int\vec{p}\cdot d\vec{r}=\frac{m}{h}\int\dot{\vec{r}}\cdot d\vec{r}+\frac{m}{h}\int(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot d\vec{r}\qquad(1)$$

式中第一个积分记为β_{grav}，第二个积分记为β_{sagnac}，将由上面牛顿方程解出的$\vec{r}$代入（1）式就可以算出：

$$\beta_{grav}=\frac{4\pi m m_g}{h^2}g_0\lambda(d^2+ad\cos\theta)\mathrm{tg}\theta\sin\phi\qquad(2)$$

$$\beta_{sagnac}=\frac{4\pi m}{h}\vec{\omega}\cdot\vec{A}\qquad(3)$$

其中g_0是有效重力加速度，$\vec{\omega}$是地球自转角速度，λ是中子波长，A是干涉路径Ⅰ与Ⅱ所围面积。

上面文献〔1〕中的推导是将中子直接与物质波相联系得出相移公式，严格说来这种方法是一种半经典方法，这个效应相移公式的推导还有其它几种方法[2]。中子在引力场中的干涉效应是一种引力量子效应，但是文献〔1〕，〔2〕的推导都没有解出量子力学的运动方程，从量子力学理论的角度严格说来，相移公式应从中子的量子力学运动方程中解出。本文用求解中子在地球引力场中的量子力学运动方程的方法给出了中子波函数相移公式新的推导方法，从量子力学原理基础上严格地导出了结果，这样对COW实验结果的分析从理论上就更加完善。

2　用Schrodinger方程导出相移公式

根据经典力学[3]，拉格朗日函数可相差一个坐标与时间的函数$f(q,t)$的全微商：

$$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$$

它们作用量的积分：

$$S'=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)dt+\int_{t_1}^{t_2}df(q,t)=S+f(q^{(2)},t_2)-f(q^{(1)},t_1)$$

由于变分$\delta f=0$，故由$\delta S'=0$与$\delta S=0$导出的运动方程是一致的。

设在惯性系K中，中子的拉氏函数可写为：

$$L=\frac{1}{2}mV^2-U$$

在非惯性系K'中，设K'相对于K以速度$\vec{V}_0(t)$运动，中子相对于K和K'的速度$\vec{V}$与$\vec{V}'$有下列关系：

$$\vec{V}=\vec{V}'+\vec{V}_0$$

这样中子的拉氏函数还可写成：

$$L=\frac{1}{2}mV^2+m\vec{V}'\cdot\vec{V}_0+\frac{1}{2}mV_0^2-U$$

式中$V_0^2(t)$是t的已知函数，可把它写成某一函数对t的全微商，因此拉氏函数中的V_0^2项可以去掉：

$$L'=\frac{1}{2}mV'^2+m\vec{V}'\cdot\vec{V}_0-U$$

固定在以角速度$\vec{\omega}$自转的地球表面上的坐标系K'的牵连速度是：

$$\vec{V}_0=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

其中$\vec{r}$是地球中心到中子的矢径，在地球引力场中，势能为：

$$U=-G\frac{Mm_g}{r}$$

式中m_g表示中子引力质量，m表示中子惯性质量，M为地球质量，于是中子在地球引力场中的Hamilton量可表示成：

$$H=\frac{P^2}{2m}-G\frac{Mm_g}{r}-\vec{P}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\qquad(4)$$

其中$\vec{P}$是正则动量，假设（4）式在量子极限仍成立，则中子在地球引力场中运动的Schrodinger方程为[4]：

$$i\frac{h\partial}{\partial t}\psi=\left(-\frac{h^2}{2m}\nabla^2-G\frac{Mm_g}{r}-\frac{h}{i}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\nabla\right)\psi \qquad (5)$$

令 $\psi=Re^{is/h}$，代入（5）式可得：

$$ih\frac{\partial}{\partial t}(Re^{is/h})=\left[-\frac{h^2}{2m}\nabla^2-G\frac{Mm_g}{r}-\frac{h}{i}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\nabla\right]Re^{is/h} \qquad (6)$$

利用$\frac{h}{i}\nabla(Re^{is/h})=e^{is/h}\left(\frac{h}{i}+\frac{\partial s}{\partial x}\right)R$

$$-h^2\nabla^2(Re^{is/h})=e^{is/h}\left[-h^2\nabla^2R+\frac{h}{i}R\nabla^2s+2\frac{h}{i}\nabla R\nabla s+(\nabla s)^2R\right]$$

代入（6）式，使等式两边实部等于实部，虚部等于虚部，得到：

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{1}{2m}(R\nabla^2S+2\nabla R\cdot\nabla S) \qquad (7a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m}-G\frac{Mm_g}{r}-(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\nabla S-\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}\right] \qquad (7b)$$

方程（7）与（6）完全等价，其中（7a）就是连续性方程。由于干涉仪的尺度是cm量级，干涉仪中Ⅰ与Ⅱ两束中子流经过不同的引力势场所引起的态的差别主要表现在它们波函数的相位差上，对它们波函数振幅的影响可以忽略不计，将R看成常量后，（7b）式的形式为：

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}-G\frac{Mm_g}{r}-(\vec{\omega}\times\overleftarrow{r})\cdot\nabla S=0 \qquad (8)$$

中子束几率流密度：

$$\vec{j}=\frac{1}{2}\left[\psi^*\frac{h}{i}\nabla\psi+C.C.\right]=\frac{R^2}{m}\nabla S$$

中子正则速度：$\vec{V}=\vec{j}/|\psi|^2=\nabla S/m$

这时（8）式可写成：

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{2}m\vec{V}^2-G\frac{Mm_g}{r}-m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V}=0$$

中子通过路径Ⅰ、Ⅱ所引起的位相差为：

$$S_{\rm I}=-\int_{\rm I}\left[\frac{1}{2}mV^2-G\frac{Mm_g}{r}-m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V}\right]dt$$

$$S_{\rm II}=-\int_{\rm II}\left[\frac{1}{2}mV^2-G\frac{Mm_g}{r}-m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V}\right]dt$$

当引力势是一个微扰项时，可近似认为中子速度$\vec{V}$不随势场变化，这样路径Ⅰ与Ⅱ中S的差为：（参考图2）

$$\Delta S = S_{\rm I} - S_{\rm II} = \int_{ABDC} \left[G\frac{Mm_g}{r} + m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V} \right] dt$$

与$\psi = Re^{is/\hbar}$相对应的相移：

$$\beta = \frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\int_{ABDC} \left[G\frac{Mm_g}{r} + m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V} \right] dt \qquad (9)$$

注意（9）式中的$\vec{V}$是正则速度，由正则动量$\vec{P} = m\vec{V}$，和正则方程$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}}$可得到：

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

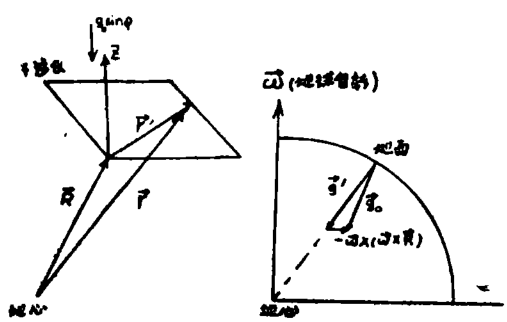

图3　考虑地球自转的有效重力加速度　$\vec{g}_0$

参考图三，设$\vec{R}$是地心到干涉仪基点的矢径，$\vec{r}$是地心到中子的矢径，$r' = \vec{r} - \vec{R}$，$\vec{g}'$是忽略地球自转时的重力加速度，$\vec{g}_0$是考虑了地球自转的有效重力加速度，这样（9）式积分号中的表达式可写成：

$$G\frac{Mm_g}{r} + m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V} =$$

$$G\frac{Mm_g}{r} + \vec{\omega}\left[\vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r})\right] + m\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) \qquad (10)$$

利用$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} - \vec{r}'\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}$，$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$，（10）式中的：

$$G\frac{Mm_g}{r} + \vec{\omega}\cdot\left[\vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r})\right] \approx -G\frac{Mm_g}{R^3}\vec{R}\cdot\vec{r}' - m\vec{r}'\cdot\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})\right] + V_0$$

$$= \left[m_g\vec{g}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})\right]\cdot\vec{r}' + V_0 = m_g\vec{g}_0\cdot\vec{r}' + V_0 \qquad (11)$$

式中常量：　$\vec{g}' = -G\frac{M\vec{R}}{R^3}$

$$\vec{g}_0 = \vec{g}' - \frac{m}{m_g}\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

$$V_0 = G\frac{Mm_g}{R} - m\vec{R}\cdot\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})\right]$$

将（11）式代入（10）式得：

$$G\frac{Mm_g}{r}+m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{V}=m_g\vec{g_0}\vec{r}'+m\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})+V_0 \quad (12)$$

将（12）式代入（9）式积分，因为V_0是个常量，它的环路积分为0，于是（9）式可写为：

$$\beta=\frac{1}{h}\int_{ABDC}m_g\vec{g_0}\cdot\vec{r}'dt+\frac{1}{h}\int_{ABDC}m\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})dt \quad (13)$$

记 $$\beta_{grav}=\frac{1}{h}\int_{ABDC}m_g\vec{g_0}\cdot\vec{r}'dt \quad (14)$$

$$\beta_{sagnac}=\frac{1}{h}\int_{ABDC}m\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})dt \quad (15)$$

设干涉仪中子流沿水平方向入射，中子流路径如图1、2所示，记路径Ⅰ与Ⅱ所围平面ABDC的法线为$\vec{n}$，在ABDC平面中取坐标轴Z如图二所示，ϕ是$\vec{g_0}$与$\vec{n}$的夹角，则：

$$\vec{g_0}\cdot\vec{r}'=g_0\sin\phi Z \quad (16)$$

选$\overline{fd}$为Z轴O点，$\overline{ab}$高度$Z_{ab}=(2d+a)\sin\theta$，$\overline{ae}$平均高度$\overline{Z_{ae}}=(d+a)\sin\theta$，$\overline{Z_{cd}}=d\sin\theta$，$\overline{bc}$与$\overline{ef}$的平均高度差是$2d\sin\theta$。各路径上中子运动时间分别为：

$t_{ab}=t_{cd}=t_{ae}=t_{fd}=\dfrac{d}{V\cos\theta}$，$t_{bc}=t_{ef}=\dfrac{a}{V_i}$，这里$V_i$是中子在晶体中的速度，实验表明，取$V_i\approx V$时，在COW实验中所引起的误差小于1%[2]。

于是：$$\beta_{grav}=\frac{1}{h}\int_{ABDC}m_gg_0\sin\phi Zdt=\frac{m_gg_0\sin\phi}{hV}[2d^2+2ad\cos\theta]tg\theta$$

注意到$P=mV=\dfrac{h}{\lambda}$，$V=\dfrac{h}{m\lambda}$，上式可写成：

$$\beta_{grav}=\frac{4\pi mm_gg_0\sin\phi}{h^2}(d^2+ad\cos\theta)tg\theta \quad (17)$$

另外：$$\beta_{sagnac}=\frac{1}{h}\int m\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})dt=\frac{1}{h}m\vec{\omega}\cdot\int\vec{r}\times d\vec{r}$$

$$=\frac{4\pi m}{h}\vec{\omega}\cdot\vec{A} \quad (18)$$

其中A是路径Ⅰ与Ⅱ所围面积。

将（17）、（18）式与（2）、（3）式比较可以看出结果完全相同，但是本文是用解出

中子在地球引力场中的Schrodinger方程的方法推导的，从量子理论上说是严格的，这样对中子在引力场中量子干涉效应的分析从理论基础上就更加完善。另外从本文的推导可以知道，相移公式是由量子力学的非相对论运动方程解出的，所以相移公式（17）、（18）只适用于中子以非相对论速度运动的情况，它的经典极限对应着牛顿方程解。

本文工作曾得到吴又麟教授的指导，特此致谢。

参 考 文 献

[1] R.Calle llaet al., Phys.Rev.Lett.34(1975)1472 J.L.Staudenman et al., Phys.Rev.A2(1980)1419

[2] D.M.Greeberger et al., Rev.Mod.Phys.51(1979)43 J.Anandan phys.Rev.D15(1977)1448

[3] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, Mechanics, 2nd ed, (New York, 1969)126—129

[4] 曾谨言，量子力学，科学出版社，第一版，(1981)469

Quantum Theory Phase—shift of Coherence Effect for Neutron in Gravitational Field

Chen Jiangchuan Li Yanyan

(Zhengzhou Institute of Technology) (Henan Commerc Cadre School)

Abstract: By solving kinetic equation of quantum mechanics of neutron which in Eerth's gravitational field, we get phase-shift formula of coherence effect in neutron diffraction and gravity experiments (COW experiments).So the analysis of COW experiments is perfected basing strict quantum theory.Because of the phase-shift formula is solution of the Schrodinger equation, it is pointed out that the phase-shift formula only suit to the neutron which emited by non-relativistic velocity.

Key words: Gravitation, quantum, phase shifts, COW experiments