第10卷 第3期 郑州工学院学报 VOL.10 NO.3
1989年 9 月 J.ZhengZhou Inst. of Technol. sept. 1989

凸凹对策最优纯策略存在唯一性的一个充分条件

徐建国

（运筹学教研室）

提 要：本文给出了抽象策略集中，零和、一人、无限凸凹对策最优纯策略存在、唯一性的一个充分条件 件较之前人得到的结果进行了改进和推广。

关键词：

研究最优纯策略或最优混合策略的存在性和唯一性是对策论中一个十分重要的问题。对于矩阵对策、连续无限对策已经得到了相应结果[1][2]。

我们知道单位正方形上连续无限对策的支付函数如果对于其中一个变量来说是一个凸函数这，种对策叫凸对策，对于凸对策有

定理1[2]设单位正方形上连续对策的支付函数 p（x、y）对每一个x是y的严格凸函数，则局中人2的最优策略是一个纯策略，并且这个策略是局中人2的唯一的最优策略。

那么，什么时候局中人1和局中人2都存在唯一的最优纯策略呢？对此，我们容易证明下面的定理。

定理2　设单位正方形上连续对策的支付函数p（x、y）对于每一个x是y的严格凸函数，对于每一个y是x的严格凹函数，则局中人1和局中人2均存在唯一的最优纯策略。

由于上述无限对策均在实数集（如［0、1］）上考虑最优纯策略或最优混合策略的存在性和唯一性，并且对对策双方的支付函数 p（x、y）加以连续的条件，这就使上述结果具有一定的局限性，下面我们就抽象策略集上、二人无限凸凹对策最优纯策略存在唯一性进行探讨，得到了一个充分条件。

设X、Y是二赋范线性空间，A、B分别是X、Y中的子集，所谓抽象策略集上的二人对策是指局中人 1在集A上选择策略$x\in A$，局中人 2在集B上选择策略$y\in B$，对应的有局中人 1从局中人2得到的支付是$p(x,y)$：$A\times B\to R$，若$v_1=\max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B}p(x,y)$，$v_2=\min\limits_{y\in B}\max\limits_{x\in A}p(x,y)$存在且相等，存在$(x^*,y^*)\in A\times B$，使得$p(x^*,y^*)=v_1=v_2$则数$(x^*,y^*)$为上述对策的鞍点（或解），$x^*$，$y^*$数为局中人1和2的最优线策略。

那么在什么条件下上述对策问题的最优纯策略存在且唯一呢？

定理3　设A、B分别为赋范线性空间X、Y中的紧凸集，二元泛函$P(x,y)$：$A\times B\to R$

收到日期：1988.12.28

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

满足对每个x是y的下半连续凸泛函，对每个y是x的上半连续凹泛函，则$\nu_1 = \max\limits_{x\in A}\min\limits_{y\in B} P(x,y)$，$\nu_2 = \min\limits_{y\in B}\max\limits_{x\in A} P(x,y)$存在且相等，从而局中人1和2存在最优纯策略$x^*$，$y^*$使得$P(x^*,y^*) = \nu_1 = \nu_2$。

为证明定理3，需要如下两个引理。

引理1 如果A是赋范性空间X中的紧子集且

i）二元泛函$\varphi(x,y)$：$A\times A\to R$对$\forall x\in A$，$\varphi(x,y)\geqslant 0$并且$\varphi(x,y)$对y拟凸的，即对$\forall x\in R$，$\forall\alpha\in R$，$\{y\varphi(x,y)<\alpha\}$是A中凸集；

ii）对每一个$y\in A$，$-\varphi(x,y)$对于x在A上是下半连续泛函。

则存在$\overline{X}\in A$，使得对$\forall y\in A$，$\varphi(\overline{X},y)\geqslant 0$。

证明 1）对$\forall y\in A$，令$M(y)=\{x\in A|\varphi(x,y)\geqslant 0\}$先证$M(y)$为A中闭集。为此设$x\in\overline{M(y)}$，则$\exists x_n\in M(y)$使得$x_n\to x$。

由于$\varphi(x_n,y)\geqslant 0$，由下半连续性

$$-\varphi(x,y)\leqslant\lim_{n\to\infty}(-\varphi(x_n,)y))\leqslant 0$$

即$\varphi(x,y)\geqslant 0\therefore x\in M(y)$故$M(y)$为闭集，又因A是紧集，所以$M(y)$亦是紧集。

2）下证若存在$y_1,y_2,\cdots,y_n\in A$，及$\forall\lambda_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$则$\overline{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}M(y_i)$

否则，有$\overline{y}$不属于$M(y_i)(i=1,2,\cdots,n)$以及$\varphi(\overline{y},y_i)<0(i=1,2,\cdots,n)$。由条件i），$M=\{y|\varphi(\overline{y},y)<0\}$是凸集，又$\because y_i\in M\therefore\overline{y}=\sum\limits_{i-1}^{n}\lambda_i y_i\in M$，从而$\varphi(\overline{y},\overline{y})<0$

此与题设矛盾。$\therefore\overline{y}=\sum\limits_{i-1}^{n}\lambda_i y_i\in\gamma\bigcup\limits_{i=1}^{A}M(y_i)$。

由非线性分析中K—K—M（Knastes—Kuratowsk—Mazarkiewicz）定理知，存在$\overline{X}\in A$，使得对$\forall y\in A$都有$\varphi(\overline{X},y)\geqslant 0$ #

引理2 设A是赋范线性空间X的紧凸集，f_1，f_2，…，f_n均为定义在A上的下半连续凸泛函，则存在$\overline{X}\in A$使得$f_i(\overline{X})\leqslant C(i=1,2,\cdots,n)$的充要条件是对$\forall\alpha_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i-1}^{n}\alpha_i=1$。存在$x_0\in A$，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)$（其中C是任意实数）

证明 必要性显然。

反证充分性。设这样的$\overline{X}$不存在，则对$\forall x\in A$，$f_i(x)$至少有一个大于C。令

$G_i=\{x\in A|f_i(x)>C\}(i=1,2,\cdots,n)$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

容易证明G_i为A中开集，$M_i = A - G_i$为闭集，且$A = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$

$\forall x \in A$，有$x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$。因为$\rho(x, M_i)$为X的连续泛函（$\rho(x, M_i)$表示x到$M_i$的距离）令

$$\beta_i(x) = \rho(x, M_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \rho(x, M_i)$$

则$\beta_i(x)$为连续泛函，显然$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) = 1$。

再令 $\varphi_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y)$，$\forall x \in A$，$\forall y \in A$。则$\varphi_1(x、y)$为x的连续泛函，是y的下半连续凸泛函。$\varphi_1(x、x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(x)$下半连续，因A是紧集故在A上$\varphi_1(x、x)$有最小值$C_0$。

若$\beta_i(x) \neq 0$，则$X \in G_i$，$f_i(x) > C$；若$\beta_i(x) = 0$，则$X \in M$，故

$$\varphi_1(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(x) > \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) C = C$$

所以$C_0 > C$。令

$$\varphi(x、y) = \varphi_1(x、y) - \varphi_1(x、x)$$

则$-\varphi(x、y) = \varphi_1(x、x) - \varphi_1(x、y)$对x下半连续，对y是拟凸的（凸一定是拟凸）。又$\varphi(x、x) \equiv 0$。根据引理1，存在$x_0 \in A$，使得$\varphi(x_0, y) \geqslant 0$对$\forall y \in A$都成立，即$\varphi_1(x_0, x_0) \geqslant C_0$，亦即对$\forall y \in A$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) \geqslant C_0 > C$$

令$\beta_i(x_0) = \alpha_i$有$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) > C$对$\forall y \in A$都成立，此与条件矛盾。故充分性得证。 #

由上述二引理，下面我们给出定理3的证明。

首先证明υ_1，υ_2存在。

因为$\max\limits_{x \in A} P(x, y) = -\min\limits_{x \in A} -P(x、y)$，而$-P(x、y)$类于x下半连续，又A为紧集，所以$\min\limits_{x \in A} -P(x、y)$存在，故$\max\limits_{x \in A} P(x、y)$存在，又因$P(x、y)$关于y下半连续，根据下半连续性知$\max\limits_{x \in A} P(x、y)$关于y亦是下半连续的，而B是紧集，所以$\min\limits_{y \in B} \max\limits_{x \in A} P(x、y)$存在即$\upsilon_2$存在。同理可证$\upsilon_1$亦存在。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

下证$\upsilon_1=\upsilon_2$

由于对$\forall x\in A$，$\forall y\in B$，$P(x,y)\geqslant\min\limits_{y\in B}P(x,y)$，对固定的$y\in B$，有

$$\max_{x\in A}P(x,y)\geqslant\max_{x\in A}\min_{y\in B}P(x,y)=\upsilon_1$$

$$\upsilon_2=\min_{y\in B}\max_{x\in A}P(x,y)\geqslant\mathop{mvx}_{x\in A}\min_{y\in B}P(x,y)=\upsilon_1$$

任取x_1，x_2，…，$x_n\in A$，$\alpha_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，令

$$f_i(y)=P(x_i,y)\ (i=1,2,\cdots,n)\qquad x_o=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i xi$$

因A凸，故$x_o\in A$，由于$P(x,y)$为x的凹泛函，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP(x_i,y)\leqslant P\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,y\right)=P(x_o,y)$$

$\because\min\limits_{y\in B}P(x_o,y)\leqslant\upsilon_1$，故存在$y_o\in B$，使得$P(x_o,y_o)\leqslant\upsilon_1$ 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(y_o)=\sum_{=1}^{n}\alpha_iP(x_i,y_o)\leqslant P(x_o,y_o)\leqslant\upsilon_1$$

根据引理2，存在$\overline{y}\in B$，使得$f_i(\overline{y})\leqslant\upsilon_1$（$i=1,2,\cdots,$ ）

即$P(x_i,\overline{y})\leqslant\upsilon_1$（$i=1,2,\cdots,n$）

因$P(x,y)$关于y下半连续，从而$G(x)=\{y\in B|P(x,y)\leqslant\upsilon_1\}$为闭集，而A为紧集，由有限交定理，因$\bigcup\limits_{i=1}^{n}G(x_i)\neq\phi$，故$\bigcup\limits_{x\in A}G(x)\neq\phi$，即存在$\overline{y}\in B$，使得对$\forall x\in A$，都有$P(x,\overline{y})<\upsilon_1$，亦有$\max\limits_{x\in A}P(x,\overline{y})$：从而

$$v_2=\min_{y\in B}\max_{x\in A}P(x,y)\leqslant\max_{x\in A}\min_{F\in B}P(x,y)=\upsilon_1$$

所以$\upsilon_1=\upsilon_2$・由A、B均为紧集知存在$x^*\leqslant A$，$y^*\in B$使得$P(x,y^*)\leqslant P(x^*,{}^*)\leqslant P(x^*,y)$对一切$x\in y$，$y\in B$都成立。即

$$P(x^*,y^*)=\max_{x\in A}\min_{y\in B}P(x,y)=\min_{y\in B}\max_{x\in A}P(x,y)$$

故局中人1和局中人2存在最优纯策略x^*,y^*。定理3到此获证。

在定理3条件不变的情况下，若$P(x,y)$对y是严格凸的，对x是严格凹的，则上述存在的最优纯策略x^*,y^*还将是唯一的。否则，设$x^*\in A$亦是局中人1的最优纯策略，且$x^{**}\neq x^*$，由于对$A\alpha$，$0<\alpha<1$，$P(\alpha x^*+(1-\alpha)x^{**},y^*)>\alpha P(x^*,y^*)+(1-\alpha)P(x^{**},y^*)$

$$\geqslant\alpha P(x^*,y^*)+(1-\alpha)P(x^*,y^*)$$
$$=P(x^*,y^*)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

记$\overline{x}=\alpha x^{*}+(1-\alpha)X^{**}$．则$\overline{x}\in A$，且$P(\overline{x},y^{*})>P(x^{*},y^{*})$，由于$x^{*}$，$y^{*}$为最优纯策略，矛盾。同理可证局中人2的最优纯策略亦是唯一的。

根据本节定理3，下节定理2自然成立。并且定理中P（x、y）关于x ,y的连续性条件即可改为半连续性，不再赘述。

作者对山东大学数学系郑汉鼎副教授在一九八八年青岛暑期运筹学研讨班上指出了此问题的背景表示感谢。同时，本文写作得到郑州工学院李菊祥付教授的支持和帮助，在此一并致谢！

参　考　文　献

〔1〕《运筹学》试用教材编写组，运筹学，清华大学出版社，1985年。
〔2〕王建华，对策论，清华大学出版社，1986年。

A Sufficient Conbition On Existence And Lunigueness Of The Optimal pure Policry About Convex Aud Concave Game

Xu Jianguo

(Room of Operation Resevch Teacling and Reserclimg)

Abstract In this Paper, We give a Sufficient conditon on existence and uniqueness of the optimal Pure Policy alout Convex and Concave game, Which is about infinite and Zero Sum two-person game. The Past result is generalized and improved.

key words: Game Theory, The optimal pure policy, existence, uniqueness.

（上接69页）

Research of Effective Stress Concentrative Coefficient of 45 (mix) Steel

Han Lianyuan　Ding Suidong

(Dept.of Math.and Mech.)

Abstract: The paper provides the experiment value of fatigue notch Coefficient and Seven P—S—N curves of diffierent effective stress concentrative Coefficient for 45 (mix) steel.By means of the experimental date, The formula of effective stress Concentrative coefficient $K_6=K_t/[0.88+A(Q/r^d)^b]$ is further simplified into $K_6=Kt/[0.88+AQ^b]$.

Key words: metal Fatigue, Effective Stress, stress Concentration.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net