第10卷 第2期　　郑 州 工 学 院 学 报　　VOL.10 NO.4
1989年 6 月　　J.zhengzhou Inst. of Technol.　　June 1989

扁壳无矩内力计算的位势边界元法

李庆斌　　王本瑞
（水环系）　（数力系）

提 要： 本文把壳扁无矩内力的计算问题转化为求解应力函数的边值问题，通过边界元法完成整个计算过程，大大减少了计算未知数，而且计算精度较高，为处理在任意法向荷载作用下任意形状的扁壳的无矩内力问题，提供了一条行之有效的途径。

关键词： 扁壳，无矩内力，边界单元法。

壳体作为一种复杂的三维结构，其内力计算非常繁杂，要求得其解析解，除少数特殊情况外，往往非常困难，工程中常求其数值解。然而，作为数值解法的有限单元法，虽然能够解决这类问题，但其计算量特别大，对计算机内存要求较高。作为数值解法的另一种方法即边界单元法，也能解决这类问题，但其计算量之大并不亚于有限单元法，因为从本质上讲它并没有降低问题的阶数。因此，工程中寻找一种简便的计算方法具有较大的实际意义。本文利用边界单元法的位势理论，把节点未知数从三维降为一维，大大降低了计算未知数，提高了计算效率。

1 基本方程

文献[1]把扁壳无矩理论的基本方程用应力函数表示为：

$$\nabla_K^2\phi = Z \tag{1}$$

其中，$\nabla_K^2\phi = K_y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+K_x\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$，$K_x$、$K_y$分别为扁壳x向和y向的曲率，z是作用在扁壳上的法向荷载，沿外法线方向为正。

对应的边界条件，可以简化为：

$$\phi_\Gamma = 0 \tag{2}$$

内力可用应力函数表示为：

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \\ N_2 &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \\ S &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

收到日期：1988.07.06.

式中，N_1、N_2是x向和y向的轴力，s为内错力。

从加权残值法的基本理论出发，可以推得方程（1）所对应的边界积分方程为：

$$C_i\phi_i+\int_\Gamma \phi_i\frac{\partial\phi^*}{\partial n}d\Gamma=\int_\Gamma \frac{\partial\phi_i}{\partial n}\phi^*d\Gamma+\int_\Omega Zz\phi^*d\Omega \tag{4}$$

式中，ϕ^*是方程（1）对应的基本解（齐次方程），即满足

$$\nabla_K{}^2\phi^*+\nabla_i=0 \tag{5}$$

这里∇_i是狄拉克函数。

特别当$k_x=k_y=k$时，有

$$\phi^*=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{6}$$

式中γ是源点与像点间的距离。

这时方程（4）可以写成

$$C_i\phi_i+\int_\Gamma\phi_i\frac{\partial\phi^*}{\partial n}d\Gamma=\int_\Gamma\frac{\partial\phi_i}{\partial n}\phi^*d\Gamma+\int_\Omega\frac{z}{K}\phi^*d\Omega \tag{7}$$

显然，方程（7）中仍然包含有域内积分。如果直接在域内进行积分，势必造成较大的计算工作量。为了简化，对于z是线性变化的情形，可将其化为边界积分来处理。

2 域内积分转化

根据数学原理，方程

$$\nabla^2\phi-B=0 \tag{8}$$

的解可以表示为任一特解ϕ^P和相应的齐次方程的解ϕ^C的和，即

$$\phi=\phi^C+\phi^P \tag{9}$$

设已找到特解ϕ^P，满足

$$\nabla^2\phi^P-B=0 \tag{10}$$

将式（9）、（10）代入式（8），得

$$\nabla^2\phi^C=0 \tag{11}$$

那么，边界值之间即有下述关系：

$$\left\{\begin{aligned}&\phi^C=\phi-\phi^P\\&\frac{\partial\phi^C}{\partial n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi^P}{\partial n}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

其中，ϕ和$\frac{\partial\phi}{\partial n}$是原问题边界上真实的位势及相应的导数。

进而，内力亦有下述关系：

$$\left.\begin{aligned}&N_1=N_1{}^C+N_1{}^P\\&N_2=N_2{}^C+N_2{}^P\\&S=S^C+S^P\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

如果能求得特解ϕ^P，则原问题就转化为求无定常位势问题（11）的解，这样就避免了域内积分的繁杂运算。下面我们就线性变化荷载的情形给出结果。

设

$$B=a+bx+cy \tag{14}$$

将式（14）代入方程（8），并令特解形式为：

$$\phi^p=Ax^3+Bx^2+Cy^3+Dy^2 \tag{15}$$

通过比较系数，不难求得：

$$A=\frac{b}{6},\ B=\frac{a}{4},\ C=\frac{c}{6},\ D=\frac{a}{4}$$

于是

$$\phi^p=\frac{b}{6}x^3+\frac{a}{4}x^2+\frac{c}{6}y^3+\frac{a}{4}y^2 \tag{15'}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi^p}{\partial n}&=\frac{\partial\phi^p}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi^p}{\partial y}n_y\\ \frac{\partial\phi^p}{\partial x}&=\frac{b}{2}x^2+\frac{a}{2}x\\ \frac{\partial\phi^p}{\partial y}&=\frac{c}{2}y^2+\frac{a}{2}y\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

特别地，对于均布荷载情形，$B=a$，这时

$$\left.\begin{aligned}\phi^p&=\frac{a}{4}(x^2+y^2)\\ \frac{\partial\phi^p}{\partial n}&=\frac{a}{2}(xn_x+yn_y)\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

因此，方程（7）可以转化为：

$$c_i(\phi_i-\phi_i^p)+\int_\Gamma\frac{\partial\phi^*}{\partial n}(\phi_i-\phi_i^p)\ d\Gamma=\int_\Gamma\phi^*\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{e\phi_i^p}{\partial n}\right)d\Gamma \tag{18}$$

这样，就把域内积分转化成了边界积分。

3　数值处理

解析地计算方程（18）的边界积分，实际上非常困难，可以通过数值积分进行计算。为此，把边界Γ剖分成若干单元，在这些单元上进行高斯积分，并对奇异积分进行处理后，得到边界元方程的矩阵形式为：

$$[H]\{\phi-\phi^p\}=[G]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi^p}{\partial n}\right\} \tag{19}$$

对于扁壳，引入边界条件（2），经过集项整理，可得线性方程组

$$[A]\{x\}=\{B\} \tag{20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &[A]=[G] \\ &\{x\}=\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\} \\ &\{B\}=[G]\{\frac{\partial\phi^p}{\partial n}\}-[H]\{\phi^p\} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

求解方程组（20），可得边界上的$\frac{\partial\phi}{\partial n}$值，这样边界上的所有未知量即可求得。进而可求域内的内力值。

当对域内求解时，方程（18）变为

$$(\phi_i-\phi_i^p)+\int_\Gamma\frac{\partial\phi^*}{\partial n}(\phi_i-\phi_i^p)d\Gamma=\int_\Gamma\phi^*(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^p}{\partial n})d\Gamma \tag{22}$$

对其进行适当微分，可得域内内力表达式为：

$$\left.\begin{aligned} &N_1^C=\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^p}{\partial n}\right)d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial y^2}(\phi_i-\phi_i^p)d\Gamma \\ &N_2^C=\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^p}{\partial n}\right)d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial x^2}(\phi_i-\phi_i^p)d\Gamma \\ &S^C=\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial x\partial y}(\phi_i-\phi_i^p)d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^p}{\partial n}\right)d\Gamma \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将上式代入（13）式，可求得原问题的真实内力。

4 实例计算

为了考查方法的可靠性，我们对一个$6\times6m^2$的简支等曲率扁壳进行了上机计算，并与文〔1〕的结果进行了比较。计算中采用了44个节点，44个线性单元，对角点用重节点法进行处理，角点处的单元大小约为其它单元长度的1／60，一般单元采用四个高斯积分点，奇异单元利用解析法直接给出系数表明。计算结果列于表1中，其中：

$$N_1=-q_0R_xk_1$$

$$N_2=-q_0R_x(1-k_1)$$

$$S=q_0\sqrt{R_xR_y}\,k_s$$

这里，q_0是扁壳的法向荷载，R_x、R_y为扁壳x向和y向的曲率半径，k_1、k_s为要计算的内力系数。

表1.　内力计算系数表

x\a	系数 / y/b / 方法	K_1 1/4	K_1 1/2	K_s 1/4	K_s 1/2
1/4	文[1]	0.500	1.000	0.280	0.486
	本文	0.490	0.998	0.270	0.482
1/2	文[1]	0.636	1.000	0.000	0.000
	本文	0.631	0.996	0.001	0.001

由表中可以看出，本法与文〔 1 〕的解析解吻合较好，可见本法具有较高的计算精度。

5 结　语

通过计算，我们不难得出以下结论：

1、本文提出的方法实质上是通过求解泊淞方程来求得壳体的无矩内力，把壳体的未知数从三维降为一维，较有限单元法及常规的边界单元法大为简化。

2、本文通过把域内积分化为边界积分，避免了域内划分单元的麻烦，从而使对荷载的处理非常简单方便。

3、对于扁壳问题，程序中可以很方便地实现节省内存的设计，因此，利用本法求解扁壳问题时降低了对计算机内存的要求，而且具有较高的计算精度。

另外，利用本文提出的思路可以很方便地推广应用到非等曲率扁壳、任意形状的扁壳的无矩内力计算问题中。

致谢：本文承蒙周鸿钧教授指导帮助，特此致谢。

参　考　文　献

[1] 徐芝纶，弹性力学（下册），高等教育出版社，1983.4.
[2] C.A.Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, PENTECH PRESS, 1978.
[3] C、A、Brebbia（Ed.），Progress in Boundary Element Method，Vol.2，PENTECH PRESS，1981.
[4] 沈家荫，张扬，边界元法若干问题的探讨，华东水利学院学报，NO.2，1985.
[5] C、A、Brebbia（Ed.），Boundary Elemncts，Proc、5 th Inte.，JaPan，NOV.，1983.

Potential Boundary Element Method for Non - moment Analysis of Flat shell

Li Qingbin Wang Benrui

(Dept of Hydraulic Eng.) (Dect.of Math & Mechenics)

Abstract In this paper, the problem of non—moment internal force of flat shell is transformed into the bound problem of stress function by potential boundary element method, and the number of unknown is deadly reduced. And this method can also analysis any non—moment flat shell with any boundary epzr any normal direction load.The calculated result presented in this paper indicates that this method introduced in this paper is valid•

keywords: flat shell, non—moment internal force, boundary elemeut method

苯和乙醇气相烃化一步合成乙苯放大试验通过省级鉴定

由我院化工系徐海升、张勤堂、王留成、魏辉荣、胡红嫣、刘大壮等教师开发的苯和乙醇直接合成乙苯新型催化剂放大试验研究于一九八九年三月通过省级鉴定。

目前国内外乙苯生产量的90%是利用乙烯和苯在三氯化铝催化剂作用下生产的。该方法工艺冗长、收率低、投资面大，对设备腐蚀严重、污染环境。采用新型催化剂由乙醇和苯一步合成乙苯，可用95%的乙醇代替乙烯与苯一步合成乙苯，它与由乙醇脱水制乙烯再与苯合成乙苯的两步法相比，大大缩短了工艺过程，降低了能耗和设备投资且对设备无腐蚀，对环境无污染。这次放大试验的成功，为工业化生产提供了设计依据，并标志着该项科研成果由实验室走向工业化生产。