

结构可靠度分析的蒙特卡罗边界法

董耀星 周鸿钧

(水利系)

提 要: 本文提出了一种结构可靠度分析的新方法——蒙特卡罗边界法。算例表明,与其它几种蒙特卡罗法相比,边界法具有精度高、模拟次数少的特点。文末对结构可靠度分析方法的发展途径提出了我们独特的看法。

关键词: 蒙特卡罗法, 结构可靠度分析, 破坏概率。

1 引言

结构可靠度分析的各种近似概率法可分为两大类:一次二阶矩模式和蒙特卡罗模拟。一次二阶矩模式的各种方法(如JC法、帕尔黑莫法以及各种优化法等),只能求解构件(只有一个功能函数)的可靠指标 β ,当功能函数非线性程度较高时,由此 β 用公式 $P_f = \Phi(-\beta)$ 所求出的破坏概率 P_f 与实际值相差较大。蒙特卡罗法具有方法简单,收敛的概率性和速度与问题的维数无关及适用性强等特点,且对构件及体系可靠度问题具有同样的适用性。但蒙特卡罗直接法误差较大,且当破坏概率 P_f 很小时所需模拟次数太大以致无法计算,故目前国内国外对蒙特卡罗法做了许多工作,以寻求抽样次数少且精度高的解法^[1,2]。本文提出的蒙特卡罗边界法具有精度高、所需抽样次数与破坏概率无关等特点。对一般可靠度问题,只需2万次模拟即可求得满意的结果。由于本法无须选择计算参数,使它的应用更具有—般性,可作为结构可靠度分析的实用方法。

2 结构破坏概率计算模式

设结构的基本随机变量为 x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 结构共有 L 个破坏模式,各模式间为串联关系第 k 个破坏模式的功能函数为:

$$z_k = g_k(x_1, \dots, x_m) \quad (k = 1, 2, \dots, L) \quad (1)$$

以 Ω_k 表示 $z_k \leq 0$ 的区域,则结构的破坏域 Ω_m 可表示为:

$$\Omega_m = \bigcup_{k=1}^L \Omega_k \quad (2)$$

结构破坏概率的精确表达式为:

$$P_f = \int \dots \int_{\Omega_m} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (3)$$

收到日期:1989.02.10.

式中 $f(x_1, \dots, x_m)$ 为各随机变量的联合概率密度函数。当各随机变量间统计独立时, 有:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j) \quad (4)$$

其中 $f_{x_j}(x_j)$ 为 x_j 的概率密度函数。此时(3)式可写为:

$$P_f = \int_{\Omega_m} \dots \int_{\Omega_m} \prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j) dx_1 \dots dx_m \quad (5)$$

由式(3)、(5)可知: 求解结构破坏概率问题实际上就是计算一个多重积分。由于其积分域和被积函数的复杂性, 难以直接积分求解。而蒙特卡罗模拟是一有力工具。

3 已有的蒙特卡罗法简述

蒙特卡罗法求定积分有两种途径: 随机掷点法和平均值法。

掷点法的基本思想是对随机向量 $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ 随机抽取 N 次样本值 $\bar{x}_1^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 记录 \bar{x} 落入 Ω_m 中的次数 n , 当 N 足够大时, 以 n/N 作为 P_f 的近似值, 即:

$$P_f \approx \bar{P}_f = n/N \quad (6)$$

掷点法计算简单, 但精度较差。当 P_f 较小时, 所需模拟次数太多, 以致耗时太多或无法计算。

若缩小 \bar{x} 的抽样区域则可提高抽样效益。文献[2]用这种思想所得的改进掷点法, 具有比直接法更高的精度。但该法的参数选择需要计算经验。又由于水工结构中随机变量较多且破坏概率较小, 该法在这种情况下的抽样效益会降低。

平均值法通过选取 Ω_m 上的概率密度函数 $f_1(x_1, \dots, x_m)$, 改造原积分成为:

$$P_f = \int_{\Omega_m} \dots \int_{\Omega_m} \frac{f(x_1, \dots, x_m)}{f_1(x_1, \dots, x_m)} f_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

由概率论中数学期望的定义知:

$$P_f = E \left[\frac{f(x_1, \dots, x_m)}{f_1(x_1, \dots, x_m)} \right] = E[f^*(x_1, \dots, x_m)] \quad (7)$$

把求解破坏概率的积分化为求解新函数 $f^*(x_1, \dots, x_m)$ 的均值。可以证明^[4]: 平均值法较直接掷点法具有更高的精度, 通常选取 $f_1(x_1, \dots, x_m)$ 为 Ω_m 上的均匀分布随机向量 (x_1, \dots, x_m) 的概率密度函数, 可得破坏概率 P_f 的蒙特卡罗平均值法的表达式为:

$$\begin{aligned} P_f &= E \left[\frac{f(x_1, \dots, x_m)}{f_1(x_1, \dots, x_m)} \right] = E \left[\frac{f(x_1, \dots, x_m)}{1/V_m} \right] \\ &= V_m \cdot E[f(x_1, \dots, x_m)] \end{aligned} \quad (8)$$

文献[1]说明了平均值法的计算方法, 并做了改进。计算经验表明: 该法的计算结果

与 v_m 的取值大小有关, 选择不当甚至会得出错误的结果。

蒙特卡罗法的误差为:

$$\varepsilon = \frac{t_\alpha \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

式中: t_α : 标准正态分布密度函数的分位值;

σ : 子样序列的标准差;

N : 模拟次数。

由(9)式可知: 计算误差在给定的 t_α 下与 σ 成正比, 与 N 的平方根成反比。这为提高精度提供了两条途径: 增加次数和降低方差。由于 N 增大一百倍才能把精度提高一位, 故单纯增加 N 不是提供精度的有效办法。使用降低方差的技术将会有效地减小误差。采用不同方差的技术将会得到不同的方法。

本文采用重要性抽样技巧及统计估计抽样技巧所推出的蒙特卡罗边界法, 具有较高的精度, 可作为结构可靠度分析的一种实用方法。

4 蒙特卡罗边界法

4.1 构件破坏概率计算公式

现以构件(单个功能函数)为例进行推导, 然后推广到体系(多个功能函数)的情形。

功能函数

$$z = g(x_1, \dots, x_m) \leq 0 \quad (10)$$

表示结构的破坏状态。由(10)总可解出:

$$x_1 \leq \bar{g}(x_2, \dots, x_m) \quad (11a)$$

$$\text{或} \quad x_1 \geq \bar{g}(x_2, \dots, x_m) \quad (11b)$$

$$\text{令} \quad x_1' = \bar{g}(x_2, \dots, x_m) \quad (12)$$

$$\text{有:} \quad x_1 \leq x_1' \quad (13a)$$

$$\text{或:} \quad x_1 \geq x_1' \quad (13b)$$

为推导方便, 现设 $x_1 \leq x_1' = \bar{g}(x_2, \dots, x_m)$ 。

重写公式(4)、(5)如下:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j) \quad (4)$$

$$P_f = \int \dots \prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j) dx_1 \dots dx_m \quad (5)$$

由平均值法原理, 当 $f_1(x_1, \dots, x_m)$ 满足:

$$\textcircled{1} f_1(x_1, \dots, x_m) \begin{cases} \neq 0 & \text{当 } (x_1, \dots, x_m) \in \Omega_m \text{ 且 } f(x_1, \dots, x_m) \neq 0 \text{ 时} \\ = 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (14)$$

$$\textcircled{2} \int_{\Omega_m} \dots \int f_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1 \quad (15)$$

时, 有:

$$\begin{aligned} P_I &= \int_{\Omega_m} \dots \int \frac{\prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j)}{f_1(x_1, \dots, x_m)} f_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &= E \left[\prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j) / f_1(x_1, \dots, x_m) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

现选 $f_1(x_1, \dots, x_m)$ 为:

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m f_{1,j}(x_j) \quad (17)$$

其中:

$$f_{1,j}(x_j) = \begin{cases} f_{x_j}(x_j) & j=2, 3, \dots, m \\ f_{x_1}(x_1) / F_{x_1}(x'_1) & j=1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{可证: } \int_{\phi_m} \dots \int f_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1$$

事实上:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_m} \dots \int f_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{x'_1} f_{1,1}(x_1) \dots f_{1,m}(x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m} \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{x'_1} f_{1,1}(x_1) dx_1 \right] f_{1,2}(x_2) \dots f_{1,m}(x_m) dx_2 \dots dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{x'_1} \frac{f_{x_1}(x'_1)}{F_{x_1}(x'_1)} dx_1 \right] \prod_{j=2}^m f_{1,j}(x_j) dx_2 \dots dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \left[F_{x_1}(x'_1) / F_{x_1}(x'_1) \right] \prod_{j=2}^m f_{1,j}(x_j) dx_2 \dots dx_m \\ &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \prod_{j=2}^m f_{x_j}(x_j) dx_2 \dots dx_m = 1 \end{aligned}$$

式中 (a_i, b_i) 为随机变量 x_i 的取值范围。

将 (17)、(18) 两式代入 (16) 式, 得:

$$\begin{aligned}
 P_f &= E \left[\frac{\prod_{j=1}^m f_{x_j}(x_j)}{\prod_{j=1}^m f_{x_{j,1}}(x_j)} \right] = E \left[\frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_1}(x_1)} \right] \\
 &= E \left[\frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_1}(x_1) / F_{x_1}(x'_1)} \right] = E [F_{x_1}(x'_1)] \quad (20)
 \end{aligned}$$

式中: $x'_1 = \bar{g}(x_2, \dots, x_m)$

式(20)的无偏估计为:

$$P_f \approx \bar{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{x_1}(x'_1)^{(i)} \quad (21)$$

其方差为:

$$Var(\bar{P}_f) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f^{(i)} - \bar{P}_f)^2 \quad (22)$$

公式(21)即为蒙特卡罗边界法求解单个功能函数破坏概率的基本公式。它相当于计算破坏边界上点(x'_1, x_2, \dots, x_m)处随机变量 x_1 的概率分布函数的均值,故称之为边界法。其二维情形如图1所示。

由于边界法免去了对 x_1 的抽样,因而具有较小的方差。文献[3]证明了:减少的那部分方差正好是对 x_1 进行抽样而引起的。

当从 $g(x_1, \dots, x_m) \leq 0$ 中只能解出 $x_1 \geq \bar{g}(x_2, \dots, x_m)$ 时,只须将上述有关公式中的 $F_{x_1}(x'_1)$ 改为 $1 - F_{x_1}(x'_1)$ 。或做变换 $y = -x_1$,则 $y = (-\mu_{x_1}, \sigma_{x_1})$,同 x_1 分布,仍用公式(21)计算。

4.2 体系破坏概率计算公式

对本文第二部分中所述结构体系,仍设从 $g_k(x_1, \dots, x_m) \leq 0$ 中可解出 $x'_1, k \leq \bar{g}_k(x_2, \dots, x_m)$ ($k = 1, 2, \dots, L$),则用蒙特卡罗边界法求解结构体系破坏概率的方法如下:

设对 $(m-1)$ 维随机向量 (x_2, \dots, x_m) 的第 i 次抽样值 $(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$,由 $g_k(x_1, \dots, x_m) = 0$ 可解出 $x_{1,k}^{(i)} = \bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$,第 k 功能函数的破坏概率为 $P_{f,k}^{(i)}$ 有:

$$P_{f,k}^{(i)} = F_{x_1}(x_{1,k}^{(i)}) = F_{x_1}(\bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})) \quad (23)$$

则第 i 次抽样所得体系破坏概率为:

$$P_f^{(i)} = \max_{1 \leq k \leq L} \{ P_{f,k}^{(i)} \} \quad (24)$$

N 次抽样后,体系破坏概率可表示为:

$$\begin{aligned}
 P_f &\approx \bar{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{1 \leq k \leq L} \{P_{f,k}^{(i)}\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{1 \leq k \leq L} F_{x_1}(\bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}))
 \end{aligned} \quad (25)$$

其方差为:

$$\text{Var}(\bar{P}_f) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f^{(i)} - \bar{P}_f)^2 \quad (26)$$

(25)式即为蒙特卡罗边界法计算体系破坏概率的基本公式。该式的意义为:对 $(m-1)$ 维随机向量的抽样值,选取 L 个破坏边界中 x'_1 取值最大,即最外边的边界上那一点处 x_1 的概率分布函数值的均值作为体系破坏概率。如图2所示。

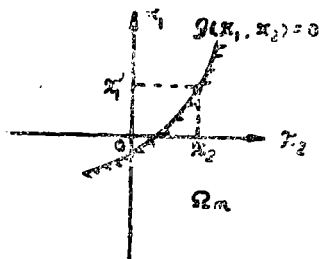


图1.边界法几何意义(单功能函数情形)

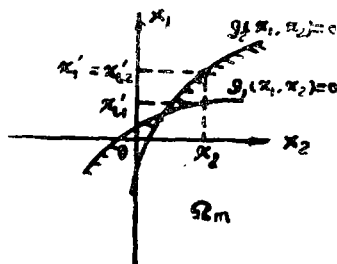


图2.边界法几何意义(多功能函数情形)

设从第 k 个功能函数中只能解出:

$$x_1 \geq x'_{1k} = \bar{g}_k(x_2, \dots, x_m)$$

则上述有关公式中的 $F_{x_1}(\bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}))$ 须以 $1 - F_{x_1}(\bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}))$ 代之。

若第 k 个功能函数中不含 x_1 ,则可认为此功能函数中 x_1 的系数为0,可得:

$$0 \leq \bar{g}_k(x_2, \dots, x_m) = -g_k(x_2, \dots, x_m)$$

则对 $(m-1)$ 维随机向量 (x_2, \dots, x_m) 的第 i 个样本值 $(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$ 有:

$$F_{x_1}(\bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})) = \begin{cases} 1 & \text{若 } 0 \leq \bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \\ 0 & \text{若 } 0 > \bar{g}_k(x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \end{cases} \quad (26)$$

即对该功能函数,边界法退化为掷点法。

蒙特卡罗边界法亦可解决随机变量具有截尾分布的构件或体系可靠度问题,此不详述。

5 算例分析

用边界法计算了几个算例,并与前述改进掷点法、改进平均值法及JC法的结果进行了对

表1.

计算例题

算例	功能函数	分布类型			数字特征
		正态	对正	极I	(均值, 标准差)
1	$z = x_1 - 0.024x_2$	x_1			(700, 140)
		x_2			(18750, 2812.5)
2	$z = 1 - x_1x_2 - x_1^2x_3 - x_4$		x_1		(25, 5.75)
		x_2			(0.0113, 0.00339)
		x_3			(0.0006, 0.0008)
		x_4			(0.0, 0.01)
3	$z = x_2 - 14.0625(x_1 + x_3)$	x_1			(60, 6)
			x_2		(2000, 74)
				x_3	(50, 45)
4	$z_1 = x_2 + 0.7071x_3 - x_5$	x_1			(14, 2.1)
	$z_2 = x_1 + 0.7071x_3 - x_5 - x_4$	x_2			(10, 1.5)
	$z_3 = 2x_1 - x_5$	x_3			(20, 3.0)
	$z_4 = 1.4142x_3 - x_5$	x_4			(3, 0.45)
	$z_5 = x_1 + x_2 - x_5 + x_4$	x_5			(13, 3.9)

比。例题和结果分别列于表1和表2。对比方法的结果摘自文献[1]和文献[2]。

例1的功能函数为正态分布随机向量的线性函数，JC法为精确解，边界法以较小区间包含其值。

例2、3说明了边界法对非线性功能函数及随机变量各种分布情况的适用性。

例4是体系可靠度问题，JC法无法求解，各种蒙特卡罗法所得结果相近，边界法标准差仍最小。

表2. 成果对比

算例	模拟次数N	改进平均值法				改进插点法				边界法			其它[2]
		\bar{P}_f	$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial P_f}$	β		\bar{P}_f	$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial P_f}$	β		\bar{P}_f	$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial P_f}$	β	
1	20000	0.551×10^{-1}	0.247×10^{-2}	1.598		0.546×10^{-1}	0.865×10^{-2}	1.602		0.540×10^{-1}	0.380×10^{-2}		IC法
	30000	0.537×10^{-1}	0.200×10^{-2}	1.610		0.541×10^{-1}	0.703×10^{-2}	1.607		0.540×10^{-1}	0.310×10^{-2}	1.607	$\beta=1.6085$
2	20000	0.143	0.266×10^{-1}	1.067		0.128	0.242×10^{-2}	1.134		0.129	0.234×10^{-2}		$Pf=0.128$
	30000	0.137	0.165×10^{-1}	1.093		0.128	0.197×10^{-2}	1.135		0.127	0.190×10^{-2}	1.141	
3	20000									0.187	0.263×10^{-2}		IC法
	30000	0.1915		0.872						0.186	0.215×10^{-2}	0.891	$\beta=0.828$
4	20000	0.108×10^{-1}	0.246×10^{-2}			0.150×10^{-1}	0.506×10^{-2}			0.150×10^{-1}	0.243×10^{-2}		$Pf=0.0149$
	30000	0.115×10^{-1}	0.193×10^{-2}	2.272		0.151×10^{-1}	0.413×10^{-2}	2.168		0.151×10^{-1}	0.197×10^{-2}	2.167	

6 展 望

结构可靠度分析的一次二阶矩模式和蒙特卡罗模拟各有优缺点。到目前为止,各自都有了一些发展,但真正具有精度高、模拟次数少,既可获得设计验算点,又可同时计算体系可靠度问题的求解方法当应在这两种方法的结合上下功夫。途径之一是把正态分布函数作为蒙特卡罗平均值法中的抽样函数,其均值选在法JC求出的设计验算点上,标准差选原分布“当量正态”后的标准差。则从此抽样函数中抽样模拟,模拟次数不仅会在万次以内,甚至千次以内或更少,就可获得高精度的结果。详细方法限于篇幅将另文给出。

参 考 文 献

- [1] 沈风生、吴世伟, 求解结构可靠度的蒙特卡罗法及其改进结构安全度与可靠度分析论文集 河海大学出版社。
- [2] 叶军、吴世伟, 蒙特卡罗法在结构可靠度分析中的应用。河海大学学报.1988.5.
- [3] 徐钟济,蒙特卡罗方法,上海科技出版社
- [4] 王梓坤,概差论基础及其应用,科学出版社
- [5] 吴世伟,结构可靠度分析,河海大学

Monte—Carlo Boundary Method For Structural Reliability Analysis.

Dong Yaoping Zhou Hongjun

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: A new method—Monte—Carlo Boundary Method is Presented which is suitable for structural reliability analysis. Examples show that, compared with other Monte—carlo methods, boundary method can reach to the satisfactory solution with less than 20, 000 times of sampling and high accuracy. The authors' opinion on the future of structural reliability analysis methods is put forward which is useful for further research.

Keywords: Monte Carlo Method, Structural Reliability Analysis,
Failure Probability, Limit State Equations.