

浮体闸溢流的数值模拟

高双聚、边恺元

(水环系)

提 要: 本文用有限元方法模拟浮体闸外部流场, 将计算结果与实验对比表明: 对曲线顶主闸板, 水面线, 压力分布及其对后铰力矩, 流量系数均符合较好。计算程序方便灵活, 通用性强, 既可用于计算浮体闸溢流, 又可用于计算常规的溢流坝溢流。

关键词: 浮体闸, 溢流, 有限元, 数值模拟

浮体闸溢流的边界形状比常规溢流坝更为复杂, 一方面自由面位置未知, 另一方面作为固体边界一部分的闸体形状受力系平衡条件的支配, 而力系又与流场流动状态有关, 因此, 对流场计算来说有两条未知边界。为使计算简化, 固定闸顶位置, 以圆弧代替付闸板形状, 只研究外部流场, 对平衡条件作为另一过程独立考虑。

1 浮体闸溢流的数学模型及有限元方程

根据势流理论, 可写出浮体闸溢流的数学模型: (区域表示参见图 1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \varphi \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \varphi \in \Gamma_1, \Gamma_2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{q}{h} \quad \varphi \in \Gamma_3 \quad (3)$$

$$\varphi = 0 \quad \varphi \in \Gamma_4 \quad (4)$$

另外在自由面上应满足等压流线条件:

$$E_0 = y + \frac{u^2}{2g} \quad (5)$$

(1) 到 (5) 构成了非线性

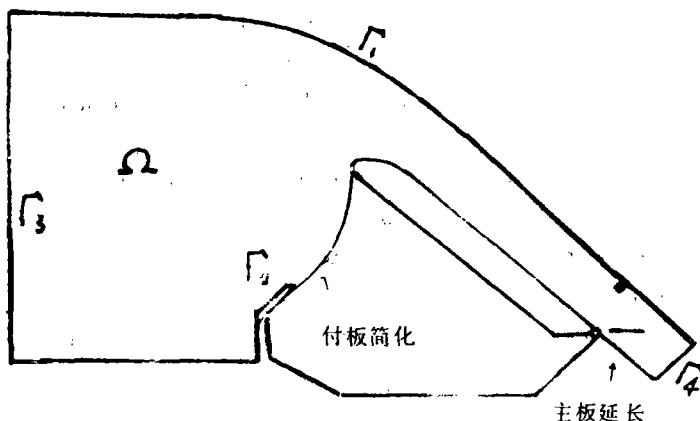


图 1. 浮体闸溢流计算区域示意图

本文 1987 年 12 月 13 日收到

问题, 更困难的是求解域未知, 需迭代求解。根据文献 [1]、[2], 这类问题有两种提法, 一是已知流量 q , 求能头 E_0 , 二是已知 E_0 (或 h) 求流量 q , 前者称为未知能头问题, 后者称为未知流量问题, 本文按前者求解。

按加权余量法的 ГАЛЕРКИН 弱表达式:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{p}{h} \delta \varphi d\Gamma \quad (6)$$

采用四边形等参二次元可得有限元方程:

$$A_{mn} \varphi_n = F_m \quad (7)$$

$$\text{其中 } A_{mn} = \bigcup_{e=1}^M \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) d\Omega \quad (8)$$

$$F_m = \bigcup_{e=1}^M \int_{\Omega_e} \frac{q}{h} N_m d\Gamma \quad (9)$$

这里 N_j 为插值基函数, M 为单元总数。

$$\text{令: } \xi_0 = \xi_j, \xi \quad (10)$$

$$\eta_0 = \eta_j, \eta \quad (11)$$

$$\text{得: } N_j = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

$$N_j = \frac{1}{2} (1 - \xi_2)(1 + \eta_0) \quad (j=5, 7) \quad (13)$$

$$N_j = \frac{1}{2} (1 - \eta_2)(1 + \xi_0) \quad (j=6, 8) \quad (14)$$

单元内函数及坐标的插值变换关系为:

$$\varphi_e = \varphi_j N_j \quad (15)$$

$$x = x_j N_j \quad (16)$$

$$y = y_j N_j \quad (17)$$

对单元 e 内的积分采用 16 点高斯积分, 可将 (8) 式写成:

$$A_{mn} = \bigcup_{e=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f_{mn}(\xi_i, \eta_j) \omega_{ij} \quad (18)$$

2 目标能量及临界点位置的决定方法

由于自由面未知, 初始位置是假定的, 不一定满足 (5) 式, 需迭代调整。首先需求出第一次迭代的目标能量 E_0 , 由于在自由面上由上游到下游经缓、急流两种流态, 在两流态的能量对自由面位置改变的反映规律不同, 因此也要找出两种流态交界, 即临界点位置。

由所设自由面, 可用 (1) 到 (4) 解出近似流场, 然后不难做出过各自由面节点的等势线, 根据文献 [2] 的小扰动理论, 沿等势线方向给自由面 i 节点一位移 ω , 相应的能量由 (5) 导出:

$$E_i(\omega) = y_i + \omega \cos \alpha_i + \frac{\omega^2}{2g} \quad (19)$$

其中 α_i 为等势线在*i*点与*y*轴夹角, 定义未扰动等势线上的平均流速为:

$$v_{0i} = \frac{q}{L_i} \quad (20)$$

扰动后等势线上的平均流速为:

$$v_i = \frac{q}{L_i + \omega_i} \quad (21)$$

扰动前流分布系数为:

$$K_i = \frac{u_{0i}}{v_{0i}} \quad (22)$$

K_i 可由近似流场求出, 若扰动后流速分布仍符合(22)则可近似得出扰动后自由面*i*点流速为:

$$u_i = k_i v_i = \frac{k_i q}{L_i + \omega_i} \quad (23)$$

将(23)代入(19), 易得*i*点能量 E_i 的极小值条件为:

$$\omega_i = \sqrt[3]{\frac{k_i^2 q^2}{g \cos \alpha_i}} - L_i \quad (24)$$

将(24)代入(19)可得*i*点的极小能量为:

$$E_{imin} = y_i + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{k_i^2 q^2}{g \cos \alpha_i}} - L_i \cos \alpha_i \quad (25)$$

按文献(2)的结论, 对自由面每一点*i*都可由(25)求出一个 E_{imin} , 全流场的极小能量应为这些极小能量的最大值, 其位置假定在自由面上第*K*点。另一面由流动的极小能量原理, *K*点的极小能量即为下一次迭代的目标能量。同时*K*点即为临界点, 即:

$$E_0^{(n+1)} = \{E_{imin}^{(n)}\}_{\max} = E_{kmin}^{(n)} \quad (26)$$

3 自由面调整迭代格式

决定了目标能量和临界点位置, 可按(19)式调整自由面, 迭代格式如下:

$$\text{令: } f_1 = E_0 - y_i - \omega_i \cos \alpha_i \quad (27)$$

$$f_2 = \frac{k_i^2 q^2}{2g(L_i + \omega_i)} \quad (28)$$

缓流区 ($i < k$) 迭代格式:

$$\omega^{(0)} = \frac{E_0 - y_i}{\cos \alpha_i} \quad (29)$$

$$f_2^{(m)} = \frac{k_i^2 q^2}{2g(L_i + \omega_i^{(m)})^2} \quad (30)$$

$$\omega_i^{(m+1)} = \frac{E - y_i - f_2^{(m)}}{\cos \alpha_i} \quad (31)$$

在临界点 ($i = k$)

$$\omega_i^{(m+1)} = \sqrt[3]{\frac{k_i^2 q^2}{g \cos \alpha_i}} - L_i \quad (32)$$

在急流区 ($i > k$) 有迭代格式:

$$\omega_1^{(0)} = 0 \quad (33)$$

$$f_1^{(m)} = E_0 - y_1 - \omega_1^{(m)} \cos \alpha_1 \quad (34)$$

$$\omega_1^{(m+1)} = \sqrt{\frac{k_1^2 q^2}{2 g f_1^{(m)}}} L_1 \quad (35)$$

为了使自由面调整合理, 对调整量乘以一松弛系数 α_1 , 本文经数值实验取 $\alpha_1 < 0.3$ 收敛较好。调整后为加速收敛并使自由面光滑, 再用一8次多项式在最小二乘法的意义下进行拟合, 并将拟合改正量乘以一与调整松弛系数相当的拟松弛系数 α_2 。

自由面调整的最终收敛标准为:

$$\sum_{i=1}^{N_f} \frac{|p_i|}{N_f} \leq \text{eps} \quad (36)$$

p 为自由面节点压力, N_f 为自由面总节点数, eps为给定的误差限度。

4 计算步骤与结果

4.1 计算步骤:

4.1.1 根据近似自由面按有限元法解近似流场。

4.1.2 验算自由面是否满足条件(36)、若满足, 计算流速、压力、力矩等并打印, 结束; 若不满足继续执行。

4.1.3 绘制等势线, 求长度及在自由面处的方向。

4.1.4 决定临界点位置及目标能量。

4.1.5 调整自由面, 转向1.1.1重复执行。

4.2 计算结果

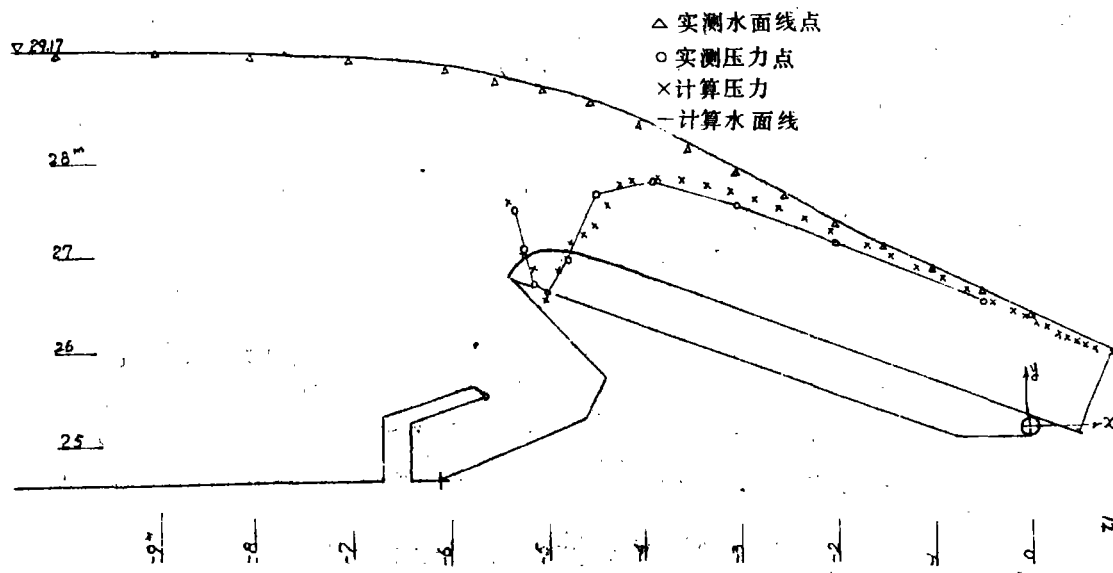
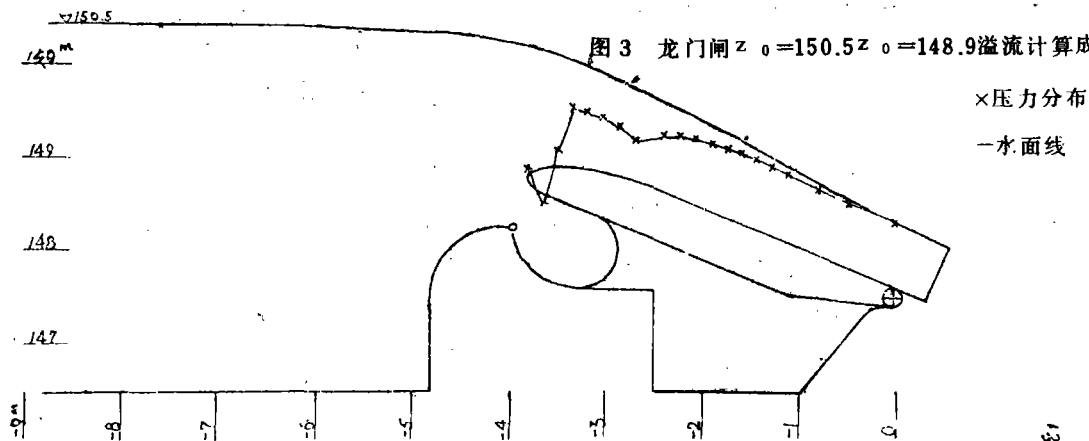
我们对龙门、牛寨、白壁三个工程实例进行了计算, 结果表明: 对曲线顶主闸板(牛寨、龙门)当主闸板开放角 $A_z \leq 30^\circ$ 时计算的水面线, 压力分布, 压力对后铰之力矩, 流量系数均与实验结果吻合较好。当 $A_z > 30^\circ$ 时, 仅压力分布与实验差别较大, 基本上满足使用要求, 而对直线顶主闸板由于脱流影响计算结果偏离实验较远, 势流模型不再适用。计算结果见附表及图2、3所示。

附表: 有限元溢流计算与实验结果对比表

工程名称	闸顶高程 Z_D	上游水位 Z_0	流量系数			溢流水压力对铰之力矩		
			实测	数值计算	经验公式	实测	数值计算	经验公式
牛寨	25.8	29.17	无	0.4188	0.4367	无	34.65	33.44
	26.0	29.17	无	0.4413	0.4414	27.44	28.91	28.05
	26.5	29.17	0.4485	0.4554	0.4533	18.43	19.71	18.61
	27.0	29.17	0.4861	0.4854	0.4653	12.28	12.00	12.31
白壁	29.5	29.17	0.4966	0.4767	0.4772	7.31	7.69	7.82
	28.0	29.17	0.4986	0.4782	0.4891	4.31	4.55	4.54

续附表

工程名称	闸顶高程 Z_D	上游水位 Z_0	流量系数			溢流水压力对铰之力矩		
			实 测	数值计算	经验公式	实 测	数值计算	经验公式
白 壁	61.2	62.86	无	0.4577	0.4528	2.74	4.53	2.83
	61.5	62.72	无	0.5205	0.4656	1.55	2.86	1.59
	61.8	62.68	无	0.583	0.4803	1.04	1.80	0.31
	62.1	62.84	无	0.63	0.4995	0.85	0.81	0.53
龙 门	148.52	150.26	0.433	0.4524	0.4422	无	6.53	6.02
	148.7	150.45	无	0.4619	0.4609	无	5.29	5.64
	148.8	150.44	无	0.4791	0.4641	无	4.83	4.96
	148.9	150.44	无	0.4647	0.4675	无	4.22	4.31

图 2 牛寨闸 $Z_0=29.17$ $Z_0=27.5$ 溢流计算成果图图 3 龙门闸 $Z_0=150.5$ $Z_0=148.9$ 溢流计算成果图

结论: 本文首次用有限元法模拟浮体闸溢流, 结果表明: 对工程上现在经常采用的曲线顶主闸板、水面线、流量系数, 溢流水压力及其对铰之力矩均与实验结果一致, 今后对这一类板型可用文中方法计算, 省去大量溢流实验工作。

参 考 文 献

- [1] 郑邦民, 溢流体形的数值模拟, 《中国科学》, A辑, 1983, 第5期
- [2] 丁道扬, 一种数值解过坝水溢流的方法, 《力学学报》, 1985, 第4期

Numerical Imitation of Floating Gates Flow

Gao Shuangju Bian Kaiyuan

(Department of Nydrolic and Enviromental Engineering)

Abstract: The Finite element Method, based on potential flow, is applied to imitate Floating Gates flow. The coefficient of discharge, pressure distribution, free surface profile and torques of pressure are caculated for various case. The predictions are compared with laboratory messurements, the agreement is found to be very good for ourvation main plate. The program is used to Floating gates and overflow dams, and is convenient.

Keywords: floating gates, overflow, finite element, numerical imitation