动量守恒和机械能守恒在伽利略变换中的不变性

李秀琴

（物理教研室）

提　　要

动量守恒定律和机械能守恒定律是普通物理力学中的两个重要定律。本文讨论了两个定律的成立条件和两个定律在伽利略变换中的不变性。

关键词：　动量，机械能，惯性参照系，伽利略变换。

动量定理和机械能定理都是由牛顿第二定律推导出来的，牛顿定律只在惯性参照系中成立，因此，由牛顿定律导出的上述两个定理及由它们导出的动量守恒定律也只在惯性参照系中适用。如果系统在某一个惯性参照系中动量守恒定律或机械能守恒定律成立，那么在另一个惯性参照系中动量守恒定律或机械能守恒定律是否也成立？即动量守恒定律和机械能守恒定律在伽利略变换中是否具有不变性？

一、动量守恒定律在伽利略变换中的不变性

设有两个质点m_1，m_2组成一个系统，两个质点在相互作用之前相对于惯性参照系s′的速度为$\vec{v}'_{10}$，$\vec{v}'_{20}$。在相互作用之后的速度为$\vec{v}'_1$，$\vec{v}'_2$。如果系统所受的合外力等于零，则系统的动量守恒，下式成立：

$$m_1\vec{v}'_{10}+m_2\vec{v}'_{20}=m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2' \qquad (1)$$

如果惯性参照系s′相对于另一个惯性参照系S以速度$\vec{u}$作均速直线运动，即$\vec{u}$＝恒矢量。那么在S系中的观察者来看系统的动量是否还守恒？

如图1：$\vec{r}'$是质点相对于S′系的位置矢量，$\vec{r}$是质点相对于S系的位置矢量，$\vec{r}_0$是S′系相对于S系的位置矢量。

由于 $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_0$，则$d\vec{r}=d\vec{r}'+d\vec{r}_0$

又有：
$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u} \qquad (2)$$

其中：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$，$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt}$，$\vec{u}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}$＝恒矢量

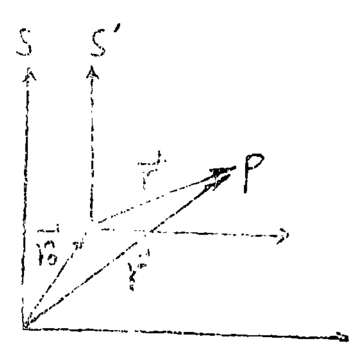

图 1

将（2）式代入（1）式，整理后可得：

$$m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

由以上讨论表明：如果系统所受的合外力等于零，则系统的动量不仅在S′参照系中守恒，在S参照系中也守恒，动量守恒定律在伽利略变换中具有不变性。

二、质点系的动能定理在伽利略变换中的不变性

由作功的计算公式：$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{s}$可以知道：虽然力$\vec{F}$在伽利略变换中具有不变性，但质点的位移$d\vec{s}$和参照系的选择有关。同一质点在不同的参照系中所观察到的位移不同，因之作用力的功也各不相同，由于这个原因，和作功相联系建立起来的定理、定律，物理量也将依赖于参照系的选择。具体而言，动能定理和机械能守恒定律在伽利略变换中是否具有不变性？其不变性的条件是什么？需要加以讨论。

设上述系统m_1，m_2所受的合外力为$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$，它们之间相互作用的内力之合力为$\vec{f}_{21}$，$\vec{f}_{12}$，且$\vec{f}_{21}=-\vec{f}_{12}$。

在S系中，由质点系的动能定理下式成立：

$$\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2=(\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2-(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2) \tag{3}$$

现分别变换（3）式的右端和左端：

$$\text{右端}=[\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1'+\vec{u})^2+\frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2'+\vec{u})^2]-[\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_{10}'+\vec{u})^2+1/2\cdot m_2(\vec{v}_{20}'+\vec{u})^2]$$

$$=(\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2)-(\frac{1}{2}m_1'v_{10}'^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}'^2)+m_1\vec{u}\cdot(\vec{v}_1'-\vec{v}_{10}')+m_2\vec{u}\cdot(\vec{v}_2'-\vec{v}_{20}') \tag{4}$$

$$\text{左端}=\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot(d\vec{r}_1'+d\vec{r}_0)+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot(d\vec{r}_2'+dr_0)$$

$$=\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1'+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2'+\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0+\int(\vec{f}_{21}+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_0$$

$$=\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1'+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2'+\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0 \tag{5}$$

等式（5）中$\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot dr_1'+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2'$是质点系所受的一切外力和一切内力在S′系中对系统所作的总功，可以用w'表示。$\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0$是在参照系变换时，一切合外力对系统作功的差值。$\int(f_{21}+f_{12})\cdot dr_0$中，由于$\vec{f}_{21}$

$=-\vec{f}_{12}$，所以 $\int(\vec{f}_{21}+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_0=0$，这是由于在S系中的观察者来看：$m_1$ m_2除了它们之间的相对位移之外，相对于S'系还有相同的附加位移$d\vec{r}_0$，只要牛顿第三定律成立，则一对作用力和反作用力的总功仅和两质点之间的相互作用力有关，以及它们之间的相对位移有关，而和参照系的选择无关。即一对作用力和反作用力的总功在伽利略变换中具有不变性。无论是保守内力或非保守内力都具有这种性质。（见注一）

（5）式中

$$\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0=\int\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_0+\int\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_0=\int m_1\frac{d\vec{v}_1{}'}{dt}\cdot d\vec{r}_0+\int m_2\frac{d\vec{v}_2{}'}{dt}\cdot d\vec{r}_0$$

$$=m_1\vec{u}\cdot\int d\vec{v}_1{}'+m_2\vec{u}\cdot\int d\vec{v}_2{}'$$

$$=m_1\vec{u}\cdot(\vec{v}_1{}'-\vec{v}_{10}{}')+m_2\vec{u}(\vec{v}_2{}'-\vec{v}_{20}{}') \qquad (6)$$

将（6）式代入（5）式后，比较（3）式左右两端的结果发现：

$$w'=\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1{}'+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2{}'$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_1v'^2+\frac{1}{2}m_2v_2{}'^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_{10}{}'^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}{}'^2\right) \qquad (7)$$

由以上推导结果表明：虽然外力的功和参照系的选择有关，系统的动能也和参照系的选择有关，但对一切惯性系而言，一切力（包括外力和内力）对系统所做的总功等于系统动能的增量。动能定理在伽利略变换中具有不变性。

三、机械能守恒定律在伽俐略变换中具有不变性的条件

如果用$E_{K1}{}'$，$E_{K2}{}'$分别表示系统在S'系中的初动能和末动能，则（7）式可表示成如下形式：

$$\int(\vec{F}_1+\vec{f}_{21})\cdot d\vec{r}_1{}'+\int(\vec{F}_2+\vec{f}_{12})\cdot d\vec{r}_2{}'=E_{k2}{}'-E_{k1}{}'$$

整理上式左端可表示成：

$$\int(\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1{}'+\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2{}')+\int(\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_1{}'+\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_2{}')=E_{k2}{}'-E_{k1}{}' \quad (8)$$

（8）式中左端第一项表示系统所受的合外力在S'系中所作的总功，以$w'_{外}$表示。第二项表示系统所受的成对内力的合力对系统所作的总功，其中包括成对的非保守内力的功和成对的保守内力的功，对于成对保守内力的功可以用与之相关的势能增量负值表示，这样只剩下成对非保守内力的功，可用$w'_{非保内}$表示。则（8）式整理后可表示成如下形式：

$$w'_{外}+w'_{非保内}=(E_{k2}{}'+E_{p2}{}')-(E_{k1}{}'+E'_{p1}) \qquad (9)$$

（9）式正是机械能定理的形式，在S'系中如果合外力的总功等于零，即$w'_{外}=0$，同时成对非保守内力的总功也等于零，即$w'_{非保内}=0$，则系统的机械能守恒。（或者$w'_{外}+w'_{非保内}=0$，系统的机械能也守恒）。即下式成立：

$$E'_{k2}+E'_{p2}=E'_{k1}+E'_{p1} \qquad (10)$$

满足机械能守恒定律的条件：$w'_{外}=0$，同时$w'_{非保内}=0$（或$w'_{外}+w'_{非保内}=0$），系统在S′中的机械能守恒，但在S系中系统的机械能并不一定守恒，因为成对非保守内力的功虽然不依赖于参照系的选择，（即$w'_{非保内}=0$，则$w_{非保内}=w'_{非保内}=0$）。而合外力的功和参照系的选择有关，所以虽然在S′参照系中合外力的功等于零（即$w'_{外}=0$），而在S参照系中合外力的功并不一定为零，（即$w_{外}\neq 0$）。

$$w_{外}=\int\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1'+\int\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2=\int\vec{F}_1\cdot(d\vec{r}_1'+d\vec{r}_0)+\int\vec{F}_2\cdot(d\vec{r}_2'+d\vec{r}_0)$$

$$=\int\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1'+\int\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0$$

$$=w'_{外}+\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0$$

虽然$w'_{外}=0$，机械能在S′系中守恒，但$\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0$不一定为零，若要机械能在S系中也守恒，必须$\int(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot d\vec{r}_0=0$，因为$d\vec{r}_0\neq 0$，所以必须$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$或合外力$\vec{F}_1+\vec{F}_2$和S′系相对于S系的位移矢量$d\vec{r}_0$垂直。由于S系的选择是任意的，而$\vec{F}_1+\vec{F}_2$和$d\vec{r}_0$垂直只是一种特殊情况，故机械能守恒定律在S系中成立的必要充分条件是：$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$

由以上讨论可知：合外力和成对非保守内力对系统作功为零，系统的机械能只在个别惯性参照系中守恒，而系所受的合外力等于零，系统的机械能在任何惯性参照系中都守恒。所以系统所受的合外力等于零是机械能守恒定律在伽利略变换中具有不变性的必要充分条件。

四、机械能守恒定律和动量守恒定律在伽俐略变换中具有不变性的区别和联系

机械能守恒定律在伽利略变换中具有不变性的必要充分条件是系统所受的合外力等于零，这也正是动量守恒定律成立的条件，但这会给初学者造成一个模糊概念，认为系统的机械能守恒，动量一定也守恒；或者认为系统的动量守恒，机械能也一定守恒。错误的认为这两个定律存在着内在的联系。

动量守恒定律和机械能守恒定律是自然界中互相独立的两个要定律，它们各自有自己的成立条件，并没什么必然的内在联系。

当系统所受的合外力为零时，系统的动量守恒，而且动量守恒定律在伽利略变换中具有不变性。所以系统所受的合外力等于零既是动量守恒定律成立的条件，又是动量守恒定律在伽利略变换中具有不变性的必充条件。但系统所受的合外力等于零时，系统的机械能并不一定守恒，由（9）式可知：$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$，则$w_{外}=w'_{外}=0$，但系统的非保守内力作功并不一定为零，由于一对非保守内力的功和参照系的选择无关，则$w_{非保内}=w'_{非保内}$，所以满足$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$的条件，在S′系中和S系中机械能的变化相同，即

$$(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})=(E_{k2}'+E_{p2}')-(E_{k1}'+E_{p1}')$$

例如：完全非弹性碰撞中，如果系统所受的合外力为零时，系统的动量守恒，但系统的机械能并不守恒，因为两球形变不同，即$d\vec{r}_1 \neq d\vec{r}_2$，则非保守内力作功不等于零。

当系统的机械能守恒时，动量也不一定守恒，因为合外力和非保守内力对系统作功为零，系统所受的合外力并不一定为零，所以动量不一定守恒。例如：一个钢球和地面作完全弹性碰撞，碰撞过程中只有重力和弹性力作功，系统的机械能守恒，但系统所受的合外力不等于零，其动量并不守恒。只有当机械能守恒定律在伽利略变换中具有不变性时，满足系统所受合外力为零的条件，才导致系统的动量也守恒。

从本文的讨论中应该明确如下两个问题：（1）系统的机械能在一个惯性系中守恒，在其它惯性系中并不一定守恒，只有满足系统所受合外力为零的条件系统的机械能在一切惯性系中都守恒。但是系统的动量在一个惯性系中守恒，在其它惯性系中也一定守恒。（2）动量守恒定律和机械能守恒定律是自然界中两条件互相独立的定律，它们各自有自已的成立条件，一般情况下系统的动量守恒，机械能不一定守恒，反之亦然。只有当机械能守恒定律在伽利略变换中具有不变性时，才导致动量也守恒。

注一：一对作用力和反作用力的总功不依赖于参照系的选择，证明如下：$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$，且$d\vec{r} = d\vec{r}' + d\vec{r}_0$

$$\int \vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_1 + \int d\vec{r}_{12}\cdot d\vec{r}_2 = \int \vec{f}_{21}\cdot(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \int \vec{f}_{21}\cdot(d\vec{r}_1' - d\vec{r}_2')$$

上式证明了一对作用力和反作用力的总功在任何参照系中都相等，不依赖于参照系的选择，仅和它们之间的相互作用力有关，同时和两质点的相对位移有关。这个结论无论对保守力和非保守力都成立。

参　考　文　献

〔1〕（美）C. 基特尔等著"力学"《伯克利物理学教程》第一卷，科学出版社　1979
〔2〕蔡伯濂"关于讲授功和能的几个问题"《工科物理教学》1981，第一期
〔3〕张祖彦"不同惯性系中的动能定理与守恒定律"《物理教学研究》1981、第二期

THE UNCHANGEABLE NATURES OF CONSERVATION OF MOMENTUM AND MECHANIC ENGERGY IN GALILEO CONVERSION

Li Xiuoqin

(Physics Teaching Group)

Abstuact

The laws of conservation of momentum and mechanic energy are two important laws in the teaching of mechanical course of general physics, Students are often puzzled by the tenable conditions of the two laws duriug their soluting problems, and suspect the unchangeable natures of the two laws in Galileo Conersion. This artical strves to disicuss the two problems mentioned abore.

Key words: momentum, mechanic energy, enference system of inertrtia, Galileo conversion