维修设备可替换时两相依部件并行系统可靠性分析

郭同德

（数学力学系）

提 要

假定系统寿命服从二维指数分布，维修设备的寿命服从指数分布，修复时间及维修设备的更换时间服从一般分布。利用马氏更新过程，本文求得了下列可靠性指标：系统首次失效时间与其后停工时间的联合分布，系统可用度、（0，t〕中系统平均故障次数，维修设备在时刻t处于更换状态的概率及处于空闲状态的概率，（0，t〕中维修设备的平均故障次数，维修设备首次失效时间的分布以及与上述指标相应的稳态值或平均值。

关键词： 二维指数分布、并行系统、可替换的维修设备、马氏更新过程

一、模 型

以往的关于可修系统的文献，大都假定维修设备是不会失效的，而在实践中，经常会碰到维修设备失效的情况。因此，从实际意义上讲，有必要研究这类系统。从理论上讲，这是一类更为一般的可修系统，通常研究的可修系统是其特殊情形[1][2]。基于上述思想，本文考虑两相依部件组成的并行可修系统。

设部件1，2的寿命（X_1，X_2）服从BVE（λ_1，λ_2，λ_{12}），即对任意x_1，$x_2\geqslant 0$

有 $p(X_1>x_1,\ X_2>x_2)=\exp\{-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_{12}\max(x,y))\}$

部件1，2的修复时间Y_1，Y_2服从一般分布$G_1(t)$，$G_2(t)$，均值为μ_1，μ_2（均为正）。修复时间与寿命独立。系统中有一台维修设备对故障部件进行修理，先修先故障的部件，若两部件同时故障，则以概率p先修部件1，以概率q先修部件2，（p，$q\geqslant 0$，$p+q=1$）。部件修复如新并立刻转入运行。维修设备的寿命U服从$R(t)=1-e^{-\alpha t}$，维修设备在空闲期间，其本身不会失效。若在修理过程中维修设备失效，则立刻进行更换，更换时间V有一般分布$V(t)$，$EV=\beta$，更换之后接着修理，总计修理时间达到Y_1或Y_2，便完成修理。

二、分 析

由〔3〕知，由X_1，X_2组成的并行系统等价于三个独立部件U_{12}，U_1，U_2组成的串——并联系统。其中U_{12}，U_1，U_2分别服从参数为λ_1，λ_2，λ_{12}的指数分布。

设$\widetilde{Y}_k$为从对部件k修理到部件修复所用的时间，包括可能更换维修设备而耽误的时间。记

$$\widetilde{G}_k^{(l)}(t)=P\{\widetilde{Y}_k\leqslant t，维修设备在〔0，\widetilde{Y}_k〕中故障l次\}$$

则

$$\breve{G}_k(t)=P\{\breve{Y}_k\leqslant t\}=\sum_{l=0}^{\infty}\breve{G}_k^{[l]}(t)$$

记$\breve{g}_k(s)$为$\breve{G}_k(t)$的LS变换，即$\breve{g}_k(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\breve{G}_k(t)$以下均以小写字母来表示相应的LS变换。

引理　$\breve{g}_k(s)=g_k(s+\alpha-\alpha v(s))$，　$\breve{\mu}_k=E\breve{Y}_k=\mu_k(1+\alpha\beta)$

证明　由定义

$$\breve{G}_k^{[l]}(t)=P\{Y_k+\sum_{m=1}^{l}V_m\leqslant t,\ \sum_{m=1}^{l}U_m\leqslant Y_k<\sum_{m=1}^{l+1}U_m\}$$

$$=\int_0^t V^{(l)}(t-y)(R^{(l)}(y)-R^{(l+1)}(y))dG_k(y)$$

其中$A^{(l)}(t)$为$A(t)$的l重卷积。约定$l=0$时$A^{(l)}(t)=1$，$\sum_{m=1}^{l}U_m=\sum_{m=1}^{l}\cdot V_m=0$

所以

$$\breve{G}_k(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^t V^{(l)}(t-y)\ e^{-\alpha y}\frac{(\alpha y)^l}{l!}dG_k(y)$$

对上式取LS变换则有

$$\breve{g}_k(s)=\sum_{l=0}^{\infty}(v(s))^l\int_0^{\infty}e^{-(s+\alpha)t}\frac{(\alpha t)^l}{l!}dG_k(t)$$

$$=g_k(s+\alpha-\alpha v(s))$$

而

$$\breve{\mu}_k=-\frac{d\breve{g}_k(s)}{ds}\bigg|_{s=0}=\mu_k(1+\alpha\beta)$$

引理得证。

系统的状态定义如下：状态0：两部件都正常。状态1：进入状态1的时刻部件2正常，部件1开始修理，持续到部件1修复。状态2：进入状态2的时刻部件1正常，部件2开始修理，持续到部件2修复。状态3：进入状态3的时刻为两部件同时失效的时刻持续到有一个修复。

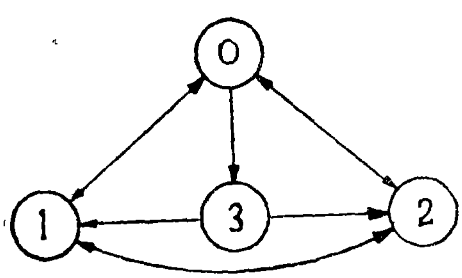

图1　系统状态之间的转移

系统的状态关系见图1

记$Z(t)$为系统在时刻t所处的状态，ξ_n为系统经过n次转移后所处的状态，T_n为第n次状态转移的时刻（$T_0=0$），即$\xi_n=Z(T_n+0)$，由上面定义知，转移时刻T_n是过程$Z(t)$的再生点。且$(\xi, T)=\{\xi_n, T_n; n=0, 1, 2, \cdots\}$是状态空间$J=\{0, 1, 2, 3\}$上的时齐马氏更新过程。记

$$Q_{ij}(t)=P(T_1\leqslant t \quad Z_1=j|Z_0=i) \quad (i, j=0, 1, 2, 3)$$

由〔4〕知

$$q_{01}(s)=\frac{\lambda_1}{\lambda+s}, \qquad q_{02}(s)=\frac{\lambda_2}{\lambda+s}, \qquad q_{03}(s)=\frac{\lambda_{12}}{\lambda+s},$$

$$q_{10}(s)=\overset{\frown}{g_1}(s+\overset{\frown}{\lambda}_2), \qquad q_{12}(s)=\overset{\frown}{g_1}(s)-\overset{\frown}{g_1}(s+\overset{\frown}{\lambda}_2),$$

$$q_{31}(s)=q\overset{\frown}{g_2}(s), \qquad q_{32}(s)=p\overset{\frown}{g_1}(s), \qquad \text{其余}q_{ij}(s)=0$$

其中$\overset{\frown}{\lambda}_1=\lambda_1+\lambda_{12}$，$\overset{\frown}{\lambda}_2=\lambda_2+\lambda_{12}$，$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$

三、可靠性指标

（一）系统可靠性指标及维修设备空闲概率。

若将这里的$\overset{\frown}{Y}_i$理解为〔4〕中Z_i，则由上面引理及〔4〕中结果，可直接得到：系统首次失效时间与其后停工时间的联合分布、系统的可用度、〔0，t〕中系统的平均故障次数、维修设备在时刻t空闲的概率，以及与上述指标相应的稳态值或平均值。为节省篇幅，这里不再给出。

（二）维修设备在时刻t处于更换状态的概率

记$H_t=\{$时刻t维修设备处于更换状态$\}$

$$\Phi_i(t)=P\{H_t|Z_0=i\} \qquad i=0, 1, 2, 3$$

由全概率公式不难得出下面更新方程组

$$\Phi_0(t)=Q_{01}*\Phi_1(t)+Q_{02}*\Phi_2(t)+Q_{03}*\Phi_3(t)$$

$$\Phi_1(t)=Q_{10}*\Phi_0(t)+Q_{12}*\Phi_2(t)+P\{H_t, T_1>t|Z_0=1\}$$

$$\Phi_2(t)=Q_{20}*\Phi_0(t)+Q_{21}*\Phi_1(t)+P\{H_t, T_1>t|Z_0=2\}$$

$$\Phi_3(t)=Q_{31}*\Phi_1(t)+Q_{32}*\Phi_2(t)+P\{H_t, T_1>t|Z_0=3\}$$

这里*表示卷积，即$A*B(t)=\int_0^t B(t-u)\,dA(u)$ 而

$$P\{H_t, T_1>t|Z_0=1\}=P\{H_t \quad \overset{\frown}{Y}_1>t|Z_0=1\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{H_t, \overset{\frown}{Y}_1>t, \text{在}(0, \overset{\frown}{Y}_1]\text{中维修设备故障n次}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\sum_{m=1}^{n}(V_m+U_m)+U_{n+1}<t<\sum_{m=1}^{n+1}(V_m+U_m), \quad Y_1>\sum_{m=1}^{n+1}U_m\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}V^{(n)}*\overline{V}*\int_0^t\overline{G}_1(u)\,dR^{(n+1)}(u)$$

所以 $\int_0^\infty e^{-st}P\{H_t,\ T_1>t|Z_0=1\}dt = \dfrac{\alpha\bar{v}(s)\tilde{\tilde{g}}_1(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}$

其中$\bar{A}=1-A$，同样可得

$$\int_0^\infty e^{-st}P\{H_t,\ T_1>t|Z_0=2\}dt = \frac{\alpha\bar{v}(s)\tilde{\tilde{g}}_2(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}P\{H_t,\ T_1>t|Z_0=3\}dt = \frac{\alpha\bar{v}(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}\left(P\tilde{\tilde{g}}_1(s)+q\tilde{\tilde{g}}_2(s)\right)$$

记$f^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$，对更新方程取L变换则有

$$\varphi_0^*(s)=q_{01}(s)\varphi_1^*(s)+q_{02}(s)\varphi_2^*(s)+q_{03}(s)\varphi_3^*(s)$$

$$\varphi_1^*(s)=q_{10}(s)\varphi_0^*(s)+q_{12}(s)\varphi_2^*(s)+\frac{\alpha\bar{v}(s)\tilde{\tilde{g}}_1(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}$$

$$\varphi_2^*(s)=q_{20}(s)\varphi_0^*(s)+q_{21}(s)\varphi_1^*(s)+\frac{\alpha\bar{v}\{(s)\tilde{\tilde{g}}_2(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}$$

$$\varphi_3^*(s)=q_{31}(s)\varphi_1^*(s)+q_{32}(s)\varphi_2^*(s)+\frac{\alpha\bar{v}(s)}{s[s+\alpha\bar{v}(s)]}\cdot\left(P\tilde{\tilde{g}}_1(s)+q\tilde{\tilde{g}}_2(s)\right)$$

由此不难得到$\varphi_i(s)$。由马氏更新过程的极限定理[5]知$\lim\limits_{t\to\infty}\Phi_i(s)$存在，且与i无关，记作$\Phi$。又由托贝尔定理[6]知

$$\Phi=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi_i(u)du=\lim_{s\to0^+}s\varphi_i^*(s)$$

$$=\frac{\alpha\beta c^{-1}}{(1+\alpha\beta)}\{\lambda_{12}(p\breve{\mu}_1+q\breve{\mu}_2)[1-(1-\breve{g}_1(\breve{\lambda}_2))(1-\breve{g}_2(\breve{\lambda}_1)]+\breve{\mu}_1[\lambda-\breve{g}_2(\breve{\lambda}_1)(\lambda_2+p\lambda_{12})]+\breve{\mu}_2[\lambda-\breve{g}_1(\breve{\lambda}_2)(\lambda_1+q\lambda_{12})]\}$$

其中$c=[1+(p\breve{\mu}_1+g\breve{\mu}_2)\lambda_{12}][1-(1-\breve{g}_1(\breve{\lambda}_2))(1-\breve{g}_2(\breve{\lambda}_1))]+\breve{\mu}_1[\lambda-\breve{g}_2(\breve{\lambda}_1)(\lambda_2+p\lambda_{12})]+\breve{\mu}_2[\lambda-\breve{g}_1(\breve{\lambda}_2)(\lambda_1+q\lambda_{12})]\}$

（三）（0，t]中维修设备的平均故障次数，

记

$N(t)=(0,t]$中维修设备的故障次数，

$\Omega_l(t)=\{(0,t]$中维修设备故障l次$\}$，

$D_i^{(l)}(t)=P\{T_1>t,\ \Omega_l(t)|Z_0=i\}$

$$Q_{ij}^{[l]}(t)=P\{Z_1=j,\ T_1\leqslant t,\ \Omega_l(T_1)\,|\,Z_0=i\}$$

$$M_i(t)=E[N(t)\,|\,Z_0=i]$$

易得下面更新方程组

$$M_0(t)=Q_{01}*M_1(t)+Q_{02}*M_2(t)+Q_{03}*M_3(t)$$

$$M_1(t)=Q_{10}*M_0(t)+Q_{12}*M_2(t)+\sum_{l=0}^{\infty}l[Q_{10}^{[l]}(t)+Q_{12}^{[l]}(t)+D_1^{[l]}(t)]$$

$$M_2(t)=Q_{20}*M_0(t)+Q_{21}*M_1(t)+\sum_{l=0}^{\infty}l[Q_{20}^{[l]}(t)+Q_{21}^{[l]}(t)+D_2^{[l]}(t)]$$

$$M_3(t)=Q_{31}*M_1(t)+Q_{32}*M_2(t)+\sum_{l=0}^{\infty}l\{[P[Q_{10}^{[l]}(t)+Q_{12}^{[l]}(t)+D_1^{[l]}(t)]+q[Q_{20}^{[l]}(t)+Q_{21}^{[l]}(t)+D_2^{[l]}(t)]\}$$

而

$$Q_{10}^{[l]}(t)+Q_{12}^{[l]}(t)=\int_0^t V^{(l)}(t-y)[R^{(l)}(y)-R^{(l+1)}(y)]dG_1(y)$$

$$\begin{aligned}D_1^{[l]}(t)&=P\{\widetilde{Y}_1>t,\ \Omega_l(t)\,|\,Z_0=1\}\\&=P\{\sum_{k=1}^{l-1}(U_k+V_k)+U_l\leqslant t<\sum_{k=1}^{l}(U_k+V_k),\ Y_1>\sum_{k=1}^{l}U_k\}\\&+P\{\sum_{k=1}^{l}(U_k+V_k)\leqslant t<\sum_{k=1}^{l}(U_k+V_k)+U_{l+1},\ Y_1+\sum_{k=1}^{l}V_k>t\}\\&=\int_0^t[V^{(l-1)}*\overline{V}(t-u)]\overline{G}_1(u)dR^{(l)}(u)+\int_0^t[R^{(l)}*\overline{R}(t-u)]\overline{G}_1\cdot(t-u)dV^{(l)}(u)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}e^{-st}d\sum_{l=0}^{\infty}l[Q_{10}^{[l]}(t)+Q_{12}^{[l]}(t)+D_1^{[l]}(t)]\\&=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}w^l[\overline{g}_1^{[l]}(s)+d_1^{[l]}(s)]\right\}\Big|_{w=1}\\&=\frac{\alpha\overline{\widetilde{g}}_1(s)}{s+\alpha\overline{v}(s)}\end{aligned}$$

类似地 $\int_0^{\infty}e^{-st}d\sum_{l=0}^{\infty}l[Q_{20}^{[l]}(t)+Q_{21}^{[l]}(t)+D_2^{[l]}(t)]=\dfrac{\alpha\overline{\widetilde{g}}_2(s)}{s+\alpha\overline{v}(s)}$

因此，对上面更新方程取LS变换则有

$$m_0(s)=q_{01}(s)m_1(s)+q_{02}(s)m_2(s)+q_{03}(s)m_3(s)$$

$$m_1(s)=q_{10}(s)m_0(s)+q_{12}(s)m_2(s)+\frac{\alpha\overset{\approx}{g}_1(s)}{s+\alpha\bar{v}(s)}$$

$$m_2(s)=q_{20}(s)m_0(s)+q_{21}(s)m_1(s)+\frac{\alpha\overset{\approx}{g}_2(s)}{s+\alpha\bar{v}(s)}$$

$$m_3(s)=q_{31}(s)m_1(s)+q_{32}(s)m_2(s)+\frac{\alpha}{s+\alpha\bar{v}(s)}[p\overset{\approx}{g}_1(s)+$$
$$q\overset{\approx}{g}_2(s)]$$

解上面线性方程组，容易得到$m_i(s)$，而平衡状态下的值为

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\lim_{s\to0+}sm_i(s)=\frac{\Phi}{\beta}$$

（四）维修设备首次失效时间的分布

以τ表示维修设备的首次失效时间，记

$$\Psi_i(t)=P\{\tau\leqslant t|Z_0=i\}$$

由全概率公式可得下面更新方程

$$\Psi_0(t)=Q_{01}*\Psi_1(t)+Q_{02}*\Psi_2(t)+Q_{03}*\Psi_3(t)$$

$$\Psi_1(t)=Q_{10}^{[0]}*\Psi_0(t)+Q_{12}^{[0]}*\Psi_2(t)+P\{U\leqslant t,\ Y_1>U\}$$

$$\Psi_2(t)=Q_{20}^{[0]}*\Psi_0(t)+Q_{21}^{[0]}*\Psi_1(t)+P\{U\leqslant t,\ Y_2>U\}$$

$$\Psi_3(t)=Q_{31}^{[0]}*\Psi_1(t)+Q_{32}^{[0]}*\Psi_2(t)+pP\{U\leqslant t,\ Y_1>U\}+qP\{U\leqslant t,$$
$$Y_2>U\}$$

取LS变换得到如下线性方程组

$$\psi_0(s)=q_{01}(s)\psi_1(s)+q_{02}(s)\psi_2(s)+q_{03}(s)\psi_3(s)$$

$$\psi_1(s)=q_{10}^{[0]}(s)\psi_0(s)+q_{12}^{[0]}(s)\psi_2(s)+\frac{\alpha}{s+\alpha}\bar{g}_1(s+\alpha)$$

$$\psi_2(s)=q_{20}^{[0]}(s)\psi_0(s)+q_{12}^{[0]}(s)\psi_1(s)+\frac{\alpha}{s+\alpha}\bar{g}_2(s+\alpha)$$

$$\psi_3(s)=h_{31}^{[0]}(s)\psi_1(s)+q_{32}^{[0]}(s)\psi_2(s)+\frac{\alpha}{s+\alpha}[p\bar{g}_1(s+\alpha)$$
$$+q\bar{g}_2(s+\alpha)]$$

其中　$q_{10}^{[0]}(s)=g_1(s+\alpha+\overset{\frown}{\lambda}_2)$，$q_{12}^{[0]}(s)=g_1(s+\alpha)-g_1(s+\alpha+\overset{\frown}{\lambda}_2)$

$q_{20}^{[0]}(s)=g_2(s+\alpha+\overset{\frown}{\lambda}_1)$，$q_{21}^{[0]}(s)=g_2(s+\alpha)-g_2(s+\alpha+\overset{\frown}{\lambda}_1)$，

$q_{31}^{[0]}(s)=qg_2(s+\alpha)$，　$q_{32}^{[0]}(s)=pg_1(s+\alpha)$

如： $Q_{12}^{[0]}(t)=P\{Z_1=2,\ T_1\leqslant t,\ \Omega_0(T_1)\mid Z_0=1\}$

$$=P\{Y_1\leqslant t,\ Y_1>X_2,\ Y_1<U\}$$

$$=\int_0^t\left(1-e^{-\widetilde{\lambda}_2 u}\right)e^{-\alpha u}dG_1(u)$$

所以 $\int_0^\infty e^{-st}dQ_{12}^{[0]}(t)=g_1(s+\alpha)-g_1(s+\alpha+\widetilde{\lambda}_2)$

解上面方程组，可得$\psi_i(s)$，平均首次失效时间为

$$E(\tau|Z_0=0)=-\frac{d\psi_0(s)}{ds}\Big|_{s=0}=c_0^{-1}[1-(g_1(\alpha)-g_1(\alpha+\widetilde{\lambda}_2))$$

$$\cdot(g_2(\alpha)-g_2(\alpha+\widetilde{\lambda}_1))]$$

$$\text{其中 } c_0=\lambda_{12}(p\overline{g}_1(\alpha)+q\overline{g}_2(\alpha))[1-(g_1(\alpha)-g_1(\alpha+\widetilde{\lambda}_2))$$

$$\cdot(g_2(\alpha)-g_2(\alpha+\widetilde{\lambda}_1))]+\overline{g}_2(\alpha)[\lambda_2+p\lambda_{12}g_1(\alpha)+$$

$$(g_1(\alpha)-g_1(\alpha+\widetilde{\lambda}_2))(\lambda_1+\lambda_{12}qg_2(\alpha))]+\overline{g}_1(\alpha)[\lambda_1+$$

$$q\lambda_{12}g_2(\alpha)+(g_2(\alpha)-g_2(\alpha+\widetilde{\lambda}_1))(\lambda_2+\lambda_{12}pg_1(\alpha))]$$

本文是在曹晋华老师的指导和帮助下完成的，特此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Cao Jinhua and Wu Yanhong, Reliability Analysis of a Multistate system with a Replaceable Repair Facility, Acta Mathematicae Sinica Vol.5 No.1 1988.

[2] 曹晋华，程侃，服务台可修的M|G|1排队系统分析。应用数学学报、第五卷第三期1982年4月 第113页

[3] 曹晋华、程侃，可靠性数学引论，科学出版社 1986年，第28页

[4] 程侃，两相依部件的系统可靠性分析，数学进展，第11卷第3期，1982年6月第206页

[5] Cinlar.E., An Introduction to stochastic processes, Prentice—Hall, Inc., 1975 第331页

[6] D.V.Widder, The Laplace Transforms, Princeton University Press, 1941年，第192页

RELIABILITY ANALYSIS OF A TWO-DEPENDENT-UNIT PARALLEL SYSTEM WITH A REPLACEABLE REPAIR FACILITY

Guo Tongde

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract

This paper deals with a two-dependent-unit parallel system where the repair facility is subject to failure and canbee replaced by a new one after it fails. Assume that the life lengthes of the two units obey a bivariate exponential distribution and the life length of the repair facility has an exponential distribution. The repair time and the replacement time of the facility are assumed to be arbitrary. By using Markov renewal theory, the reliability quantities of the system and the repair facility are obtained, respectively.

Key words: Bivariate Exponential Distribution, Parallel System, Replaceable Repair Facility, Markov renewal Processes.