

矩形截面构件截面弯矩曲率的简化计算

高丹盈

(大连工学院)

提 要

本文基于钢筋混凝土构件全过程分析的理论公式,把构件截面的弯矩曲率关系简化为三折线,根据对钢筋和混凝土应力应变关系的简化,推导出弯矩曲率曲线上特征点的计算公式。

关键词: 钢筋混凝土、弯矩、曲率

前 言

对钢筋混凝土结构或构件进行全过程分析,要求建立强度与变形统一的计算方法为之提供手段。近年来由于电子计算技术的发展以及有限元法的应用,使钢筋混凝土结构的弹塑性全过程理论又有了新的发展,用弯矩曲率法进行分析就是其中之一。关于钢筋混凝土和预应力混凝土构件截面的弯矩曲率关系,国内外得到比较深入的研究^[1-3],但由于采用的本构关系和考虑的影响因素不尽相同,所得公式很复杂,难于直接应用。本文以简化的钢筋和混凝土应力应变关系为基础,研究钢筋混凝土构件截面的弯矩曲率关系,并给出特征点的简化计算公式,与一般公式比较,符合很好。

一、基本假定与一般公式

为了建立受弯构件截面弯矩曲率的计算公式,提出下列基本假定:

1、截面受力前后,平截面假定成立;

2、受压混凝土的应力应变关系采用图1上方的曲线

$$\text{当 } 0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_c^y \text{ 时 } \quad \sigma_c = E_c' \varepsilon_c$$

$$\text{当 } \varepsilon_c > \varepsilon_c^y \text{ 时 } \quad \sigma_c = f_{mc}$$

式中 σ_c 、 ε_c 分别为混凝土的应力和压应变;

ε_c^y 、 ε_c^u 分别为混凝土的屈服应变和极限应变;

E_c' —混凝土的变形模量, $E_c' = 0.65 E_c$;

E_c —混凝土的弹性模量;

f_{mc} —混凝土的弯曲抗压强度;

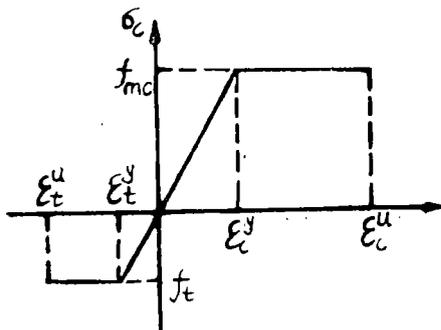


图 1

本文1987年6月20日收到

受拉混凝土的应力应变关系采用图1下方的曲线。

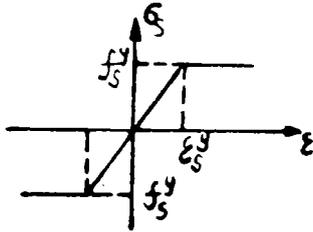


图 1

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 < \epsilon_s \leq \epsilon_s^y \text{ 时 } & \sigma_s = E_s \epsilon_s \\ \text{当 } \epsilon_s > \epsilon_s^y \text{ 时 } & \sigma_s = f_s^y \end{aligned}$$

式中 σ_s 、 ϵ_s —分别为混凝土的拉应力和拉应变；

ϵ_s^y 、 ϵ_s^u —分别为混凝土的屈服拉应变和极限拉应变；

f_s^y —混凝土的抗拉强度。

3、钢筋的应力应变关系采用图2所示曲线

$$\text{当 } 0 < \epsilon_s < \epsilon_s^y \text{ 时 } \quad \sigma_s = E_s \epsilon_s$$

$$\text{当 } \epsilon_s > \epsilon_s^y \text{ 时 } \quad \sigma_s = f_s^y$$

式中 σ_s 、 ϵ_s —分别为钢筋的应力与应变；

f_s^y 、 ϵ_s^y —分别为钢筋的屈服强度与屈服应变；

E_s —钢筋的弹性模量。

4、裂缝间混凝土对构件刚度的影响忽略不计。

基于上述假定，在弯矩M和轴力N联合作用下，带裂缝截面的应力应变分析如图3所示。为了进行数值分析，把截面沿高度分成若干个小单元，并设每个小单元上的应力均匀分布，由图中的平衡条件得到两个方程：

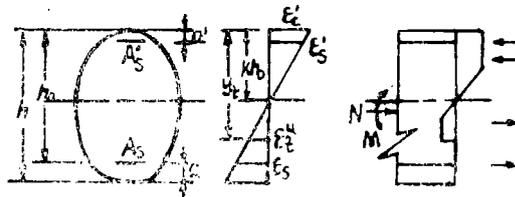


图3 截面应力和应变分布图

$$\int_0^{kh_0} \sigma_c(\epsilon) b dy - \int_{kh_0}^{h_0} \sigma_s(\epsilon) b dy + \sigma_s' A_s' - A_s \sigma_s = N \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{kh_0} \sigma_c(\epsilon) b y dy - \int_{kh_0}^{h_0} \sigma_s(\epsilon) b y dy + \sigma_s' A_s' (kh_0 - a_s') \\ + \sigma_s A_s (h - kh_0 - a_s) = M - N \left(\frac{h}{2} - kh_0 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 kh_0 —中和轴高度；

y_1 —相应于混凝土抗拉极限应变 ϵ_s^u 值纤维处距截面上边缘的距离；

b 、 h —分别为截面宽度和高度。

由变形相容条件得变形相容方程：

$$\frac{\epsilon_c'}{kh_0} = \frac{\epsilon_s'}{kh_0 - a} = \frac{\epsilon_s}{(1-k)h_0} = \frac{\epsilon}{kh_0 - y} = \frac{\epsilon_s^u}{y_1 - kh_0} \quad (3)$$

相应地，截面曲率为：

$$\phi = \frac{\varepsilon_1'}{k h A_s} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{s_i} (k - k_i) h_i$$

式(1)~(3)即是全截面分析的一般理论公式,它能全面地反映荷载作用下构件强度和变形规律。但这种分析方法必须借助于电子计算机,不便于实际应用。

二、弯矩曲率曲线的简化

在实际应用中,可以把M- ϕ 关系曲线简化为三折线,计算的关键是确定特征点的弯矩和曲率,下面推导具体公式。

1、裂缝即将出现时的 M_{cr} 、 ϕ_{cr}

即将出现裂缝的瞬间,受压区应力为弹性分布,受拉区为弹塑性分布。为方便计算通常是在等价变换的条件下,用塑性系数考虑受拉区的弹塑性特性,这时截面的应力分布为直线,受拉边缘应力为 γf_t ,见图4。

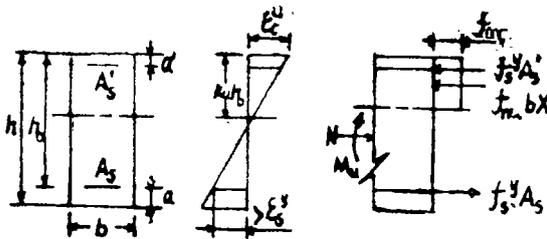


图4 裂缝出现时截面应力和应变分布图

考虑到截面开裂时变形较小,为使公式简单,不计钢筋的作用,则受压区高度系数 k_{cr} 的表达式为:

$$k_{cr} = 1 - \frac{a(\gamma - 1)}{2(a - 1)} \quad (3')$$

式中 γ —正截面抵抗矩塑性系数;

a —与 γ 有关的系数,计算式为:

$$a = \frac{1 + (\gamma - 3)(\gamma - 1) - 2\sqrt{1 + (\gamma + 1)(\gamma - 3)}}{(\gamma - 3)^2}$$

从受拉混凝土边缘纤维应变 ε_s' 求得截面曲率 ϕ_{cr} 为:

$$\phi_{cr} = \frac{\varepsilon_s'}{(1 - k_{cr}) h} \quad (4)$$

相应的抗裂弯矩 M_{cr} 为:

$$M_{cr} = W_o (\gamma f_t + \frac{N}{A}) \quad (5)$$

式中 W_o —截面的弹性抵抗矩,矩形截面 $W_o = \frac{bh^3}{6}$;

A —截面面积,对矩形截面 $A = bh$ 。

2、受拉钢筋初始屈服时的 M_f 、 ϕ_f

当截面达到屈服曲率时,受压边缘混凝土应变 ε_c' 可能出现 $\varepsilon_c' \leq \varepsilon_c^y$ 或 $\varepsilon_c' > \varepsilon_c^y$ 两种情况,因而有图5所示两种应力图形,根据截面几何条件和平衡条件有下列方程:

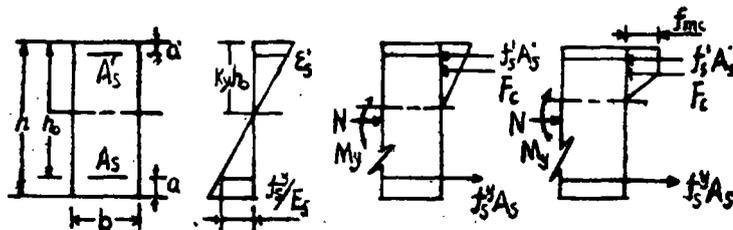


图5 钢筋屈服时截面应力和应变图

$$F_c + f_s' A_s' = f_s A_s + N \quad (6)$$

$$M_y = M_c + f_s' A_s' (k_y - \xi_0) h_0 + f_s A_s (1 - k_y) h_0 + \frac{1}{2} N h_0 (1 + \xi_0 - 2k_y) \quad (7)$$

$$\phi_y = \frac{\epsilon_s'}{(1 - k_y) h_0} \quad (8)$$

式中 F_c ——受压区混凝土合力；

M_c ——受压区混凝土合力对中和轴的力矩；

$f_s' = \frac{k_y - \xi_0}{1 - k_y} \cdot \epsilon_s' E_s$ ，当 $\epsilon_s' > \epsilon_{s'}$ 时，取 $f_s' = f_{s'}$ ；

$$\xi_0 = \frac{a'}{h_0}。$$

下面分两种情况讨论

(1) 混凝土受压区应力图形为三角形 ($\epsilon_c' \leq \epsilon_{c'}$)

在这种情况下， F_c 、 M_c 的关系式为：

$$F_c = \frac{1}{2} k_y^2 b h_0 \frac{\epsilon_s' E_c'}{1 - k_y} \quad M_c = \frac{k_y^3}{3(1 - k_y)} b h_0^2 n f_s'$$

分别代入 (6)、(7) 式，令 $n = \frac{E_s}{E_c'}$ ， $\rho = \frac{A_s}{b h_0}$ ， $\rho' = \frac{A_s'}{b h_0}$

$P_z = [N / (b h_0 f_s')] + \rho$ 得

当 $\epsilon_s' < \epsilon_{s'}$ (受压钢筋未屈服) 时

$$K_y = -n(P_z + \rho') + \sqrt{n(P_z + \rho')^2 + 2n(P_z + \rho')\xi} \quad (9a)$$

$$M_y = \frac{k_y^3}{3(1 - k_y)} b h_0^2 n f_s' + \frac{(k_y - \xi)^2 h_0 A_s' f_s' + (1 - k_y) h_0 A_s f_s' + \frac{1}{2} N h_0}{1 - k_y}$$

$$\cdot (1 + \xi - 2k_y) \quad (9a')$$

当 $\epsilon_s' \geq \epsilon_{s'}$ 时 (受压钢筋屈服)

$$K_y = -n(P_z - \rho') + \sqrt{n(P_z - \rho')^2 + 2n(P_z - \rho')\xi} \quad (9b)$$

$$M_y = \frac{k_y^3}{3(1 - k_y)} b h_0^2 n f_s' + f_s' A_s' (k_y - \xi) h_0 + f_s A_s (1 - k_y) h_0 + \frac{1}{2} N h_0$$

$$\cdot (1 + \xi - 2k_y) \quad (9b')$$

(2) 混凝土受压区的应力图形为梯形 ($\varepsilon_c' > \varepsilon_c^y$)

在这种情况下, 把混凝土受压区高度 $k_y h_0$ 分成由 a_1 和 a_2 两部分组成。

$$a_2 = (1 - k_y) h_0 \cdot \frac{\varepsilon_c^y}{\varepsilon_s^y} = \frac{f_{mc}}{1.5} \cdot \frac{E_s}{E_c'} (1 - k_y) h_0 = A h_0 (1 - k_y)$$

式中 $A = \frac{n}{B}$, $n = \frac{E_s}{E_c'}$, $B = \frac{f_s^y}{f_{mc}}$

$$a_1 = k_y h_0 - a_2 = (1 + A) h_0 k_y - A h_0$$

F_c 、 M_c 的关系式为:

$$F_c = f_{mc} b h_0 \left(k_y + \frac{1}{2} A k_y - \frac{1}{2} A \right), \quad M_c = \frac{1}{6} f_{mc} b h_0^2 [3k_y^2 (1 - 2A) - A^2 (1 - k_y)^2]$$

分别代入(6)、(7)式得:

当 $\varepsilon_s' < \varepsilon_s^y$ (受压钢筋未屈服) 时

$$k_y = \frac{C + \sqrt{C^2 - (2 + A)[A - 2(p_z + \rho' \xi)B]}}{2 + A} \quad (10a)$$

式中 $C = 1 + A + (p_z + \rho') B$

$$M_y = \frac{1}{6} f_{mc} b h_0^2 [3k_y^2 (1 - 2A) - A^2 (1 - k_y)^2] + \frac{(k_y - \xi)^2 h_0 A_s' f_s^y}{1 - k_y} +$$

$$(1 - k_y) \cdot h_0 A_s' f_s^y + \frac{1}{2} N h_0 (1 + \xi - 2k_y) \quad (10a')$$

当 $\varepsilon_s' \geq \varepsilon_s^y$ (受压钢筋屈服) 时

$$k_y = \frac{2(p_z - \rho') B + A}{2 + A} \quad (10b)$$

$$M_y = \frac{1}{6} f_{mc} b h_0^2 [3k_y^2 (1 - 2A) - A^2 (1 - k_y)^2] + A_s' f_s^y (k_y - \xi) h_0 +$$

$$(1 - k_y) h_0 f_s^y A_s + \frac{1}{2} N h_0 (1 + \xi - 2k_y) \quad (10b')$$

(3) 屈服阶段应力图形的判别

① 受压区混凝土应力图形的判断

当受压边缘混凝土的应力满足 $\sigma_c' \leq f_{mc}$ 时, 受压区应力图形为三角形。 σ_c' 的关系式

为:

$$\sigma_c' = E_c' \varepsilon_c' = E_c' \frac{k_y}{1 - k_y} \cdot \varepsilon_s^y$$

由 $f_{mc} = \frac{k_y}{1 - k_y} E_c' \varepsilon_s^y$ 得:

$$k_{yc} = \frac{f_{mc}}{\varepsilon_s' E_c' + f_{mc}} \quad (11)$$

式中 k_{yc} ——受压区应力图形由三角形转为梯形时的临界高度系数。

对于 I 级钢筋和 C10 混凝土以 $\varepsilon_s' = \frac{210}{210 \times 10^3} = 0.001$, $f_{mc} = 5.2 \text{ N/mm}^2$ 和 $E_c' = 0.65 \times 17.5 \times 10^3 = 11375 \text{ N/mm}^2$ 代入 (11) 式可求得 $k_{yc} = 0.34$ 。对不同种类的钢筋和不同标号的混凝土计算得到的 k_{yc} 值见表 1。

表 1

钢筋	标号	C10	C15	C20	C25	C30	C35
I 级		0.340	0.359	0.388	0.417	0.455	0.479
II 级		0.228	0.265	0.290	0.316	0.350	0.372
III 级		0.212	0.248	0.272	0.296	0.329	0.351

一般情况下, 比较 k_y 和 k_{yc} 得到下面判别受压区应力图形的公式。

$$\frac{1}{2B^2} [k_{yc} (2 + u) - u] > \rho_z' - \rho \quad (12)$$

当 (12) 式成立时, 应力图形为三角形, 否则为梯形。

② 受压钢筋是否屈服的判别

当受压钢筋的应变满足 $\varepsilon_s' \geq \varepsilon_{sy}'$ 时, 受压钢筋屈服。 ε_s' 的关系式为:

$$\varepsilon_s' = \frac{k_y - \xi}{1 - k_y} \cdot \varepsilon_s^y$$

由 $\varepsilon_s^y = \frac{k_y - \xi}{1 - k_y} \varepsilon_s^y$ 得:

$$k_{yc}' = \frac{1 + \xi}{2}$$

式中 k_{yc}' ——受压钢筋达到屈服应变时的临界高度系数。

比较 k_y 和 k_{yc}' 得到下列判别式:

$$(1 + \xi)^2 / [4n(1 - \xi)] > (\rho_z - \rho') - n \quad (13)$$

$$1 - (2 + A)(1 - \xi) / 4 \leq B(\rho_z - \rho') \quad (14)$$

式 (13) 是受压区混凝土应力图形为三角形时受压钢筋是否屈服的判别式, 当满足式 (13) 时受压钢筋未屈服, 分别按式 (9a)、(9a') 求 k_y 、 M_y 以及相应的 ϕ_y ; 否则受压钢筋屈服, 分别按式 (9b)、(9b') 求 k_y 、 M_y 以及相应的 ϕ_y 。

式 (14) 是受压区混凝土应力图形为梯形时受压钢筋是否屈服的判别式, 当满足式

(14)时受压钢筋屈服, 分别按式(10b)、(10b')求 k_r 、 M_r 以及相应的 ϕ_r ; 否则受压钢筋未屈服, 分别按式(10a)、(10a')求 k_r 、 M_r 以及相应的 ϕ_r 。

综合上述, 求算屈服阶段截面受压区高度系数 k , 以及相应的 M_r 、 ϕ_r 时, 先按式(12)判别受压区混凝土的形状, 如应力图形为三角形时, 按式(13); 判别受压钢筋是否屈服, 如应力图形为梯形时, 按式(14)判别受压钢筋是否屈服, 从而按相应的公式计算 k_r 、 M_r 和 ϕ_r 。

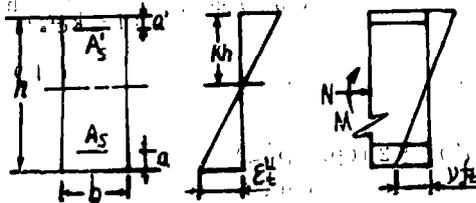


图6 混凝土压碎时截面应力和应变图

3、受压混凝土达到极限应变的 M_u, ϕ_u

把实际应力分布用等效矩形应力图代替, 见图6, 其中 $x = 0.8k_u h_0$ 。根据几何关系和平衡方程得:

$$k_u = 1.25B(p_z - \rho')$$

$$M_u = 0.8k_u f_{mc} b h_0^2 (0.4k_u - \xi) + f_y A_s h_0 (1 - \xi) + \frac{1}{2} N h_0 (1 - \xi)$$

$$\phi_u = \frac{\epsilon_u}{k_u h_0}$$

汇总三个特征点的计算公式见表2。

三、简化方法与精确方法的比较

为了验证简化方法的适用性, 图7对比了同一构件截面用两种方法计算的 $M-\phi$ 曲线。由图可见两种方法相差很小, 而简化方法计算简单、意义明确, 更便于实际应用。

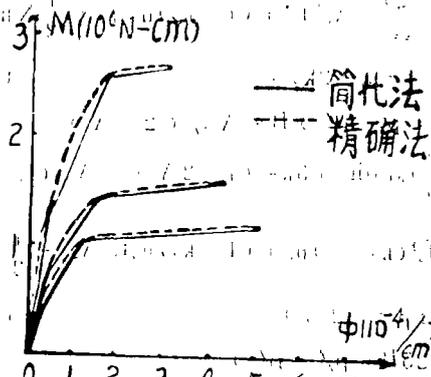


图7 弯矩——曲率曲线示例

表 2

受力状态	类 型		受压区高度系数和弯矩的计算公式	曲率计算公式
	受压区砼应力图型	受压钢筋状态		
裂缝出现	三角形	$\varepsilon_s' < \varepsilon_s^y$	$k_{Cr_0} = 1 - \frac{a(\gamma - 1)}{2(a - 1)} \quad (3')$ $M_{Cr_0} = W_0 \left(r f_t + \frac{N}{A} \right) \quad (5)$	$\phi_{Cr_0} = \frac{\varepsilon_s^u}{(1 - k_{Cr_0})} h \quad (4)$
钢筋屈服	三角形	$\varepsilon_s' < \varepsilon_s^y$	$k_y = -n(p_z + \rho') + \sqrt{n(p_z + \rho')^2 + 2n(p_z + \rho')\xi} \quad (9a)$ $M_y = \frac{k_y^3}{3(1 - k_y)} b h_0^2 n f_s^y + \frac{(k_y - \xi)^2}{1 - k_y} A_s' f_s^y + (1 - k_y) h_0 A_s f_s^y + \frac{1}{2} N h_0 (1 + \xi - 2k_y) \quad (9a')$	$\phi_y = \frac{\varepsilon_s^y}{(1 - k_y) h} \quad (8)$
		$\varepsilon_s' \geq \varepsilon_s^y$	$k_y = -n(p_z - \rho') + \sqrt{n(p_z - \rho')^2 + 2n(p_z - \rho')\xi} \quad (9b)$ $M_y = \frac{k_y^3}{(1 - k_y)} b h_0^2 n f_s^y + f_s^y A_s' (k_y - \xi) h_0 + f_s^y A_s \cdot (1 - k_y) h_0 + \frac{1}{2} N h_0 (1 + \xi - 2k_y) \quad (9b')$	
砼压碎	梯形	$\varepsilon_s' < \varepsilon_s^y$	$k_y = \frac{[C + \sqrt{C^2 - (2 + A)[A - 2(p_z + \rho')\xi]B}]}{(2 + A)} \quad (10a)$ $M_y = \frac{1}{6} f_{mc} b h_0^2 [3k_y^2(1 - 2A) - A^2(1 - k_y)^2] + \frac{(k_y - \xi)^2}{1 - k_y} A_s' f_s^y + (1 - k_y) h_0 A_s + \frac{1}{2} N h_0 \cdot (1 + \xi - 2k_y) \quad (10a')$	$\phi_u = \frac{\varepsilon_u}{k_u h_0} \quad (17)$
		$\varepsilon_s' \geq \varepsilon_s^y$	$k_y = \frac{[2(p_z - \rho')B + A]}{(2 + A)} \quad (10b)$ $M_y = \frac{1}{6} f_{mc} b h_0^2 [3k_y^2(1 - 2A) - A^2(1 - k_y)^2] + A_s' f_s^y (k_y - \xi) h_0 + (1 - k_y) h_0 f_s^y A_s + \frac{1}{2} N h_0 \cdot (1 + \xi - 2k_y) \quad (10b')$	
砼压碎	矩形	$\varepsilon_s' \geq \varepsilon_s^y$	$k_u = 1.25B(p_z' - \rho') \quad (15)$ $M_u = 0.8k_u f_{mc} b h_0^2 (0.4k_u - \xi) + f_s^y A_s h_0 (1 - \xi) + \frac{1}{2} N h_0 (1 - \xi) \quad (16)$	$\phi_u = \frac{\varepsilon_u}{k_u h_0} \quad (17)$

参 考 文 献

- [1] 成文山: 配置无明显屈服点钢筋混凝土受弯构件截面的弯矩与曲率分析, 土木工程学报, 1982. 12。
[2] 朱伯龙等: 钢筋混凝土受弯构件延性系数的研究, 同济大学学报, 1978. 1。
[3] 高丹盈、丁自强: 截面抗裂计算的分析研究, 郑州工学院学报, 1987. 1。
[4] 高丹盈: 纤维钢筋混凝土构件截面延性系数的计算公式, 大连工学院研究生论文选, 1987。

SIMPLIFIED CALCULATION ON CROSS SECTION MOMENT AND CURVATURE OF RECTANGULAR CROSS SECTION MEMBER

Gao Danying

(Dalian Institute of Technology)

Abstract

Based on the theoretical formulas of RC member, all process analysis, the paper simplifies the moment—curvature relationship of member cross section into three lines, according to the simplification of stress—strain relationship of steel and concrete, deduces special point formulas on the moment—curvature curve.

Key words: Reinforced concrete, Cross section, Moment, Curvature