

# 关于伽辽金法用于压杆弹性 稳定问题的探讨

寿楠椿 张正国 罗汉泉

(郑州工学院)

(湖南大学)

## 提 要

本文通过一系列实例计算表明,国内外某些专著中利用梁的小挠度弯曲理论的三阶微分方程,采用伽辽金法求解压杆弹性稳定问题的做法可能导致异常的结果,因而是不可取的。文中从变分法的角度进行了分析。

关键词: 屈曲, 伽辽金法

## 一、问题的提出

在许多结构稳定理论专著和教材中都论述了图1所示下端固定,上端自由的等截面直杆,受自重作用时的临界荷载计算问题。容易列出该压杆屈曲时挠曲轴的微分方程和相应的边界条件<sup>[1,2]</sup>。按图1所示坐标系,平衡微分方程为

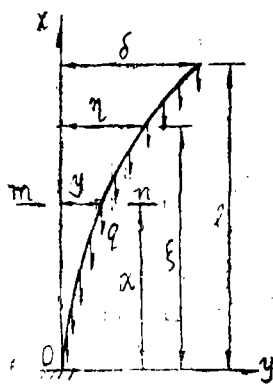


图1

$$EI y'' = \int_x^l q (\eta - y) d\xi \quad (1-1)$$

式中EI为该杆的抗弯刚度, q为其单位长度重量。等号右边的积分是任意截面m—n上,由均布荷载q所产生的弯矩。式(1-1)关于x求导数以后化为

$$EI y''' = -q(1-x)y' \quad (1-2)$$

此式实际上是任意截面m—n上剪力的平衡方程,相应的边界条件为

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(l) = 0 \quad (1-3)$$

通过变量置换,式(1-2)可以降为二阶常微分方程而化为关于截面转角的贝塞尔微分方程,应用贝塞尔函数求得临界荷载的精确值<sup>[1]</sup>为

$$(ql)_{cr} = 7.834 \sqrt{\frac{EI}{l^2}} \quad (1-4)$$

在实际应用中,为了求出临界荷载的近似值,常采用基于变分原理的李兹法以及伽辽金

本文1987年3月4日收到。

法等数值方法。在专著[2]中采用伽辽金法求解，取图2所示坐标系，于是式(1-2)化为

$$EIy'''' + qxy' = 0 \quad (1-5)$$

令  $\alpha^2 = \frac{q}{EI}$ ，上式化为

$$y'''' + \alpha^2 xy' = 0 \quad (1-6)$$

设挠度的试函数为

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + a_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \quad (1-7)$$

显然满足几何的和力学的边界条件

$$y(0) = y'(l) = y''(0) = y'''(l) = 0$$

由式(1-6)有

$$L(y) = y'''' + \alpha^2 xy'$$

$$= -a_1 \left( \frac{\pi}{2l} \right)^3 \cos \frac{\pi x}{2l} - a_2 \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^3 \cos \frac{3\pi x}{2l} + \alpha^2 x \left( a_1 \frac{\pi}{2l} \right)$$

伽辽金方程为

$$(1-1) \quad \int_0^l L(y) \sin \frac{\pi x}{2l} dx = 0 \quad \int_0^l L(y) \sin \frac{3\pi x}{2l} dx = 0$$

因而

$$-a_1 \left( \frac{\pi}{2l} \right)^3 \frac{1}{\pi} + a_2 \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^3 \frac{1}{\pi} + \alpha^2 a_1 \frac{\pi}{2l} \frac{l^2}{2\pi} - \alpha^2 a_2 \frac{3\pi}{2l} \frac{l^2}{4\pi} = 0$$

$$(1-1) \quad -a_1 \left( \frac{\pi}{2l} \right)^3 \frac{1}{\pi} - a_2 \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^3 \frac{1}{\pi} + \alpha^2 a_1 \frac{\pi}{2l} \frac{l^2}{4\pi} + \alpha^2 a_2 \frac{3\pi}{2l} \frac{l^2}{6\pi} = 0$$

经整理得到特征方程

$$(1-1) \quad -\pi^2 + 2\alpha^2 l^3 = 0 = (27\pi^2 - 9\alpha^2 l^3) = 0$$

$$-\pi^2 + \alpha^2 l^3 = 0 \quad -9\pi^2 + 2\alpha^2 l^3 = 0$$

解得

$$(1-1) \quad (q)_{cr} = 7.761769058 \frac{EI}{l^2} \quad (1-9)$$

与临界荷载的精确解式(1-4)比较，式(1-9)的近似值稍低于精确值，误差为0.97%，

(但在专著[2]中,由于在展开式(1—8)时计算有误,却得到偏高的近似值( $q_1$ ) $c_r = 7.87 \frac{EI}{l^3}$ ,至今仍被某些书籍沿用)。现在就提出了这样一个问题:已经证明<sup>[5,6]</sup>,从最小总

势能原理出发,采用李兹法求得的压杆临界荷载的近似值是精确值的上限,而当选择的挠度试函数相同,并且满足几何的和力学的边界条件时,伽辽金法与李兹法所得到的代数方程组相同,因而求得的临界荷载的近似值也相同。现在居然得到比精确解偏低的近似值,应如何解释?这就是本文要回答的问题。

## 二、用伽辽金法按四种形式的压杆屈曲微分方程求解

为了便于比较,我们统一采用图2所示坐标系,列出下列四种形式的压杆受自重作用而屈曲时的挠曲轴的微分方程

$$EIy'' + \int_0^x q(y - \eta) d\xi = 0$$

该式对 $x$ 求导数后可得

$$EIy''' + qx y' = 0 \quad (1)$$

$$EIy^{IV} + qxy'' + qy' = 0$$

若引入截面转角 $\theta = y'$ ,则上面的第二个方程可化为

$$EI\theta'' + qx\theta = 0$$

仍令 $\alpha^2 = \frac{q}{EI}$ ,以上四式化为

$$y'' + \alpha^2 \int_0^x (y - \eta) d\xi = 0 \quad (2-1)$$

$$\theta' + \alpha^2 x \theta = 0 \quad (2-2)$$

$$y''' + \alpha^2 x y' = 0 \quad (2-3)$$

$$y^{IV} + \alpha^2 x y'' + \alpha^2 y' = 0 \quad (2-4)$$

下面分别从上面式(2—1)至(2—4)的二阶,三阶,四阶微分方程出发,采用伽辽金法求解。

### 1、根据式(2—1)求解

仍取式(1—7)所表示的挠度试函数,则

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y'' + \alpha^2 \int_0^x (y - \eta) d\xi \\ &= -a_1 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{2l} - a_2 \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2 \sin \frac{3\pi x}{2l} + \alpha^2 x \left( a_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + a_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \right) + \alpha^2 a_1 \frac{2l}{\pi} \left( \cos \frac{\pi x}{2l} - 1 \right) + \alpha^2 a_2 \frac{2l}{3\pi} \left( \cos \frac{3\pi x}{2l} - 1 \right) \end{aligned}$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1 L(y) \sin \frac{\pi x}{2l} dx = 0$$

$$\int_0^1 L(y) \sin \frac{3\pi x}{2l} dx = 0$$

因而

$$\begin{cases} -a_1 \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \frac{1}{2} + \alpha^2 a_1 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \right) l^2 - \alpha^2 a_2 \frac{l^2}{\pi^2} - \alpha^2 a_1 \frac{2l}{\pi} \frac{1}{\pi} \\ -\alpha^2 a_2 \frac{2l}{3\pi} \frac{3l}{\pi} = 0 \\ -a_2 \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^2 \frac{1}{2} - \alpha^2 a_1 \frac{l^2}{\pi^2} + \alpha^2 a_2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{9\pi^2} \right) l^2 + \alpha^2 a_1 \frac{2l}{\pi} \frac{1}{3\pi} \\ -\alpha^2 a_2 \frac{2l}{3\pi} \frac{1}{3\pi} = 0 \end{cases}$$

经整理得到特征方程

$$\begin{vmatrix} -\pi^2 + \alpha^2 l^3 \left( 2 - \frac{8}{\pi^2} \right) & -\frac{24}{\pi^2} \alpha^2 l^3 \\ -\frac{8}{3\pi^2} \alpha^2 l^3 & -9\pi^2 + \alpha^2 l^3 \left( 2 - \frac{8}{9\pi^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-5)$$

解得

$$(ql)_{cr} = 7.8382469 \frac{EI}{l^2} \quad (2-6)$$

这个近似值略高于精确值式(1-4)，误差约为0.013%，看来是符合规律的。

2、根据式(2-2)求解

若同样取挠度 $y$ 的试函数为式(1-7)，则转角 $\theta$ 的试函数应取为

$$\theta = y' = a_3 \cos \frac{\pi x}{2l} + a_4 \cos \frac{3\pi x}{2l} \quad (2-7)$$

那么  $L(\theta) = \theta'' + \alpha^2 x \theta$

$$= -a_3 \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - a_4 \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{3\pi x}{2l} + \alpha^2 x \left( a_3 \cos \frac{\pi x}{2l} + a_4 \cos \frac{3\pi x}{2l} \right)$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1 L(\theta) \cos \frac{\pi x}{2l} dx = 0 \quad \int_0^1 L(\theta) \cos \frac{3\pi x}{2l} dx = 0$$

得特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\pi^2 + \alpha^2 l^3 \left(2 - \frac{8}{\pi^2}\right) & -\frac{8}{\pi^2} \alpha^2 l^3 \\ -\frac{8}{\pi^2} \alpha^2 l^3 & 9\pi^2 + \alpha^2 l^3 \left(2 - \frac{8}{9\pi^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-8)$$

该特征方程与式(2-5)所表示的特征方程等价(副对角线上的两个元素之积相等),结果仍为式(2-6)。

### 3、根据式(2-4)求解

仍取挠度的试函数为式(1-7),有

$$\begin{aligned} L(y) &= y^{IV} + \alpha^2 xy'' + \alpha^2 y' \\ &= a_1 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 \sin \frac{\pi x}{2l} + a_2 \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 \sin \frac{3\pi x}{2l} - \alpha^2 x a_1 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3 \sin \frac{\pi x}{2l} \\ &\quad - \alpha^2 x a_2 \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^3 \sin \frac{3\pi x}{2l} + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2l} a_1 \cos \frac{\pi x}{2l} + \frac{3\pi}{2l} a_2 \cos \frac{3\pi x}{2l}\right) \end{aligned}$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1 L(y) \sin \frac{\pi x}{2l} dx = 0 \quad \int_0^1 L(y) \sin \frac{3\pi x}{2l} dx = 0$$

积分并整理得到特征方程

$$\begin{vmatrix} \pi^4 + (8 - 2\pi^2) \alpha^2 l^3 & 24\alpha l^3 \\ 24\alpha l^3 & 81\pi^4 + (8 - 18\pi^2) \alpha^2 l^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2-9)$$

稍加演算,式(2-9)即可化为式(2-5),故所得临界荷载的近似值与式(2-6)完全相同。

### 4、根据式(2-3)求解

前面已采用挠度试函数(1-7)进行计算,得到了略低于精确解的临界近似值式(1-9)。

由上面计算可见,从二阶、四阶的微分方程(2-1)、(2-2)、(2-4)出发,采用同样的挠度试函数(1-7),应用伽辽金法所得到的临界荷载的近似值完全相同,并且是精确值的上限。但采用三阶的微分方程(2-3),却得到了偏低的近似值。如果选择别的挠度试函数,按式(2-3)计算,又有可能得到偏高的近似值。例如采用两个参数的多项式挠度试函数,根据(2-3)式求解如下:

设挠度的试函数为

$$y = A(x^5 - 10l^2x^3 + 25l^4x) + B(x^4 - 4lx^3 + 8l^3x^2) \quad (2-10)$$

显然满足几何的和力学的边界条件

$$y(0) = y'(l) = y''(0) = y'''(l) = 0$$

由式(2-3)有

$$\begin{aligned} L(y) &= 60A(x^2 - l^2) + 24B(x - l) + \alpha^2 x [A(5x^4 - 30l^2x^2 + 25l^4) \\ &\quad + B(4x^3 - 12lx^2 + 8l^3)] \end{aligned}$$

伽辽金方程为

$$\int_0^1 L(y)(x^5 - 101^2 x^3 + 251^4 x) dx = 0$$

$$\int_0^1 L(y)(x^4 - 41x^3 + 81^4 x) dx = 0$$

特征方程为

$$\begin{aligned} -327.5 + \frac{311360}{1851} \alpha^2 1^3 &= -\frac{620}{7} + \frac{4823}{245} \alpha^2 1^3 \\ -\frac{724}{7} + \frac{5095}{252} \alpha^2 1^3 &= -28 + \frac{3907}{630} \alpha^2 1^3 \end{aligned} \quad (2-11)$$

解得

$$(q1) c_r = 8.754293 \frac{EI}{l^2} \quad (2-12)$$

与临界荷载的精确解式(1-4)比较,式(2-12)的近似解高于精确值约11.7%。可见,采用三阶微分方程计算,不能预先估计临界荷载近似值的界限。下面再作进一步考察。

#### 5、用伽辽金法求解两端铰支压杆的临界荷载

两端铰支的压杆受轴向压力P作用时,与式(2-1)至(2-4)相似的屈曲时的挠曲微分方程的四种形式分别为

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0 \quad (2-13)$$

$$y'''' + \alpha^2 y = 0 \quad (2-14)$$

$$y'''' + \alpha^2 y' = 0 \quad (2-15)$$

$$y'''' + \alpha^2 y''' = 0 \quad (2-16)$$

式中  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ , 而  $\theta = y'$ 。已知小挠度理论的屈曲形状为  $y = a \sin \frac{\pi x}{l}$ , 将此式作为挠度的

试函数,应用伽辽金法,从式(2-13)、(2-14)和(2-16)出发都能求得临界荷载的

精确值  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 。倘若采用式(2-15)有

$$L(y) = y'''' + \alpha^2 y' = a \frac{\pi^3}{l^3} \left( \alpha^2 - \frac{\pi^2}{l^2} \right) \cos \frac{\pi x}{l}$$

可见,伽辽金方程恒等于零,即

$$\int_0^1 L(y) \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0$$

$\alpha^2$ 可以取任意值,这一结果显然是谬误的。

如果采用具有两个参数的正弦函数

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (2-14)$$

作为挠度试函数, 应用伽辽金法, 从二阶和四阶微分方程出发也都能求得临界荷载的精确值

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 。若按三阶微分方程 (2-15) 式有

$$L(y) = a_1 \frac{\pi}{l} \left( \alpha^2 - \frac{\pi^2}{l^2} \right) \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \frac{2\pi}{l} \left( \alpha^2 - \frac{4\pi^2}{l^2} \right) \cos \frac{2\pi x}{l} = 0$$

伽辽金方程为

$$\int_0^l L(y) \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0 \quad \int_0^l L(y) \sin \frac{2\pi x}{l} dx = 0$$

得到

$$\alpha^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \quad \alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

取其中较小值得临界荷载精确值  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 。

通过上面几个实例计算说明, 按三阶微分方程, 利用伽辽金法求临界荷载的近似值, 随着挠度试函数选取的不同, 结果可能偏低, 也可能偏高, 甚至由正确的屈曲形状得出临界荷载可取任意值的谬论。虽然有时也有可能得到精确解, 但总的看来这一做法是可疑的。

### 三、与变分法的联系

从数学上看, 上面讨论的问题实际上是某几种类型的常微分方程的特征值问题。<sup>[8,5,7]</sup> 本文仅从变分法的直接法的角度进行讨论。

对于图2所示压杆, 从式 (2-2) 或式 (2-4) 出发, 作一点数学演算, 或者写出总势能泛函的表达式后略加简约, 不难列出与这两式相对应的泛函:

$$\Pi_{(2-2)} = \frac{1}{2} \int_0^l (\theta'^2 - \alpha^2 x \theta^2) dx \quad (3-1)$$

式 (2-2) 是函数  $\Pi_{(2-2)}$  变分问题的欧拉方程, 其边界条件为

$$\text{刚性边界条件} \quad \theta(1) = 0 \quad (3-2)$$

$$\text{自然边界条件} \quad \theta'(0) = 0$$

$$\Pi_{(2-4)} = \frac{1}{2} \int_0^l (y''^2 - \alpha^2 x y'^2) dx \quad (3-3)$$

式 (2-4) 是泛函  $\Pi_{(2-4)}$  变分问题的欧拉方程, 其边界条件为

$$\text{刚性边界条件} \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

$$\text{自然边界条件} \quad y''(0) = 0, \quad y'''(1) = 0 \quad (3-4)$$

于是可以从式(3-1)或式(3-3)出发,通过求泛函的极值来求得图2所示压杆的临界荷载。应用李兹法,并采用式(1-7)的挠度试函数(注意到 $\theta = y''$ ),可以求得与式(2-5)或式(2-9)完全相同的特征方程,从而求得临界荷载的近似值为式(2-6)。数学上经证明这样求得的特征值的近似值是最小特征值(即临界荷载)的上限。前面从式(2-2)或式(2-4)出发,应用伽辽金法采用同样的试函数(1-7),得到完全相同的结果,乃是因为在满足边界条件(3-2)或(3-1)的情况下,李兹法和伽辽金法是等价的。<sup>[5,6]</sup>

但是对于三阶微分方程(2-3),找不到相应的泛函,其特征值问题与上面所讨论的变分问题没有联系,上述有关特征值界限的结论不成立。因此用伽辽金法确定的特征值,其界限不能判断。前面的实例计算已经表明,随着挠度试函数选取的不同,求得的临界荷载的近似值可能低于,也可能高于精确值,甚至可取任意数值,虽然有时也可能得到正确的结果。总的看来,由三阶方程出发,应用伽辽金法求压杆的临界荷载的近似值的做法(专著[2]、[8]等)是不可取的,不宜采用。

### 参 考 文 献

- (1) S.P.Timoshenko, J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1961.
- (2) G. 毕尔格麦斯特, H. 斯托依普著, 戴天民等译, 稳定理论, 上卷, 中国工业出版社, 1964.
- (3) 伊. 伊博著, 雷有常等译校, 高等工程力学, 上册, 海洋出版社, 1985.
- (4) E. 卡姆克著, 张鸿林译, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977.
- (5) 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 1979.
- (6) C.L.Dym, J.H. Shames著, 袁祖貽等译, 固体力学变分法, 中国铁道出版社, 1984.
- (7) F.B.Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, 1952.
- (8) A.C.Вольмир, Устойчивость упругих систем, М., Физматгиз, 1963.

## ON THE USE OF GALERKIN'S METHOD FOR PROBLEM OF ELASTIC STABILITY OF COLUMNS

Shou Naichun, Zhong Zhengguo, Luo Hanquan

(Zhengzhou Institute of Technology)

(Hunan University)

### Abstract

It is known that the buckling problems can be solved effectively by means of galerkin's method, when their equilibrium differential equations can be written out directly and the trial functions of deflection satisfy all the boundary conditions. However, this paper shows that solving the elastic stability problem of columns in Galerkin's method may obtain improper solution if we use three order differential equation of the small deflection theory of beams with the help of variational principle, we analysed the causes of failure of this method.

**Key words** Buckling, Galerkin's method.