矩阵分析法在放大电路中的应用

查　世　锦

（电机系）

摘　　要

本文应用数学中的矩阵理论，研究了求解较复杂的放大电路的问题．由于运用了严谨的矩阵分析方法进行求解，并编制了扩展BASIC程序，因而计算结果精确度高，运算简便。

关键词：矩阵分析法，放大电路，计算程序。

电子电路已广泛地应用于电子测量仪器以及自动控制系统中。多年来，国内外不少学者对电子线路的放大环节的计算进行了很多研究与探讨，提出了近似求解法、方框图法以及倒信号流图法等。这些方法虽各有所长，但用来解决复杂的放大电路，存在着运算过程繁琐和有一定的局限性等缺点，使用起来困难较大。本文提出的矩阵分析法，对解决实际的放大电路，不仅具有使用范围宽（适用于求解各种复杂的小信号放大电路）和精确度高等优点，还由于它采用了计算机作辅助分析，所以运算极为简便。

一、矩阵分析法计算放大电路

电子电路的矩阵分析法，就是将实际的电子电路等效为一个线性电路后，将其抽象为一个数学模型，建立矩阵方程，通过计算机求解矩阵方程。

下面通过两个实例来介绍矩阵分析法的解题步骤：

1、图1为单级电压并联负反馈放大电路。已知输入信号$\dot{E}_s$，晶体管的输入电阻r_{be}，电流放大系数β以及各个电阻、电容的数值。求输出电压V_0。

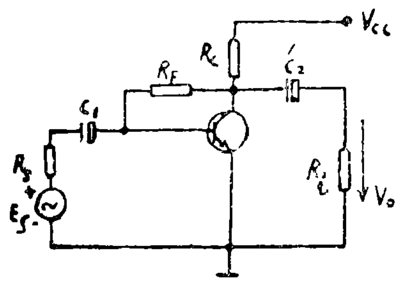

图1

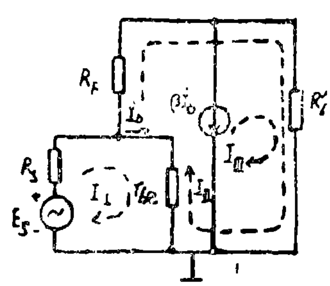

图2

解题步骤：

① 画出原电路的微变等效电路（如图２）构成线性网络。

② 建立矩阵方程。

利用回路电流法列线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}&(R_s+r_{be})\dot{I}_{\mathrm{I}}-r_{be}\dot{I}_{\mathrm{II}}=\dot{E}_s\\&-r_{be}\dot{I}_{\mathrm{I}}+(r_{be}+R_F+R'_L)\dot{I}_{\mathrm{II}}+R'_L\dot{I}_{\mathrm{III}}=0\\&\dot{I}_{\mathrm{III}}=-\beta\dot{I}_b\end{aligned}\right\}$$

将$\dot{I}_b=\dot{I}_{\mathrm{I}}-\dot{I}_{\mathrm{II}}$代入上面方程组，经整理得到：

$$\left.\begin{aligned}&(R_s+r_{be})\dot{I}_{\mathrm{I}}-r_{be}\dot{I}_{\mathrm{II}}=\dot{E}_s\\&-r_{be}\dot{I}_{\mathrm{I}}+(r_{be}+R_F+R'_L)\dot{I}_{\mathrm{II}}+R'_L\dot{I}_{\mathrm{III}}=0\\&\beta R'_L\dot{I}_{\mathrm{I}}-\beta R'_L\dot{I}_{\mathrm{II}}+R'_L I_{\mathrm{III}}=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}R_s+r_{be} & -r_{be} & 0\\ -r_{be} & (r_{be}+R_F+R'_L) & R'_L\\ \beta R'_L & -\beta R'_L & R'_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{\mathrm{I}}\\ I_{\mathrm{II}}\\ I_{\mathrm{III}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_s\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\text{阻抗矩阵}\ [Z]=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_s+r_{be} & -r_{be} & 0\\ -r_{be} & (r_{be}+R_F+R'_L) & R'_L\\ \beta R'_L & -\beta R'_L & R'_L\end{pmatrix}$$

$$\text{电流列向量}\ [Z]=\begin{pmatrix}I_{\mathrm{I}}\\ I_{\mathrm{II}}\\ I_{\mathrm{III}}\end{pmatrix}$$

电压列向量 $[V]=\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\end{pmatrix}$ 式中$V_1=E_s$　$V_2=0$　$V_3=0$

则 $[Z]\ [I]=[V]$

由于电子电路的阻抗矩阵为非奇异矩阵，可以满足〔Z〕≠0的条件，故可得矩阵方程如下：

〔I〕=〔Z〕$^{-1}$〔V〕式中〔Z〕$^{-1}$为阻抗矩阵〔Z〕的逆矩阵。

当用矩阵法求得回路电流的列向量后，从而得到I_{I}，I_{II}，I_{III}的数值，那么输出电压$V_o=-(I_{\text{II}}+I_{\text{III}})R'_L$

③　用计算机进行辅助分析

由〔I〕=〔Z〕$^{-1}$〔V〕知，可以简单地用矩阵相乘的方法得到I矩阵的各个元素。在扩展BASIC中，为了得到某个矩阵的逆，例如Z矩阵的逆，只要简单地写INV〔Z〕就能实现，但是，在使用INV（Z）时，A矩阵必须是一个方阵，如果我们使得C=INV（Z），于是I=Z^{-1}※V，就可写成：

I=C※V

用矩阵语句写出求I矩阵各元素值的程序如下：

```
20   DIM  V(3, 1), Z(3, 3)I(3, 1), C(3, 3)
30   MAT  READ V, Z
40   MAT  C=INV(Z)
50   MAT  I=C※V
60    PRINT "MATRIX  Z"
70    MAT  PRINT  Z,
80     PRINT "INVERSE OF MATRIX"
90   MAT  PRINT  C;
100  PRINT "MATRIX V"
110  MAT  PRINT V;
120  PRINT "MATRIX I"
130  MAT  PRINT I
140  DATA  V1, V2, Z11, Z12, Z13, Z21, Z22, Z23, Z31, Z32, Z33,
150  END
```

若放大电路的信号源是以电流源型式给出，则用节点电位法建立方程组更为方便。其微变等效电路如图3所示。

图中$I_s=E_s/R_s$，取3点为电位参考点，并设$V_i=V_1$，$V_0=V_2$，可得方程组如下：

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be}}+\frac{1}{R_F}\right)V_1-\frac{1}{R_F}V_2=I_s\\&-\frac{1}{R_F}V_1+\left(\frac{1}{R_F}+\frac{1}{R'_L}\right)V_2=-\beta\dot{I}_b\end{aligned}\right.$$

将$I_b=\dfrac{V_1}{r_{be}}$代入上式，经整理得到：

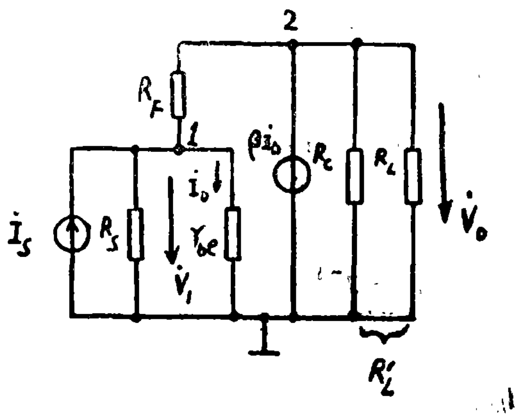

图3

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be}}+\frac{1}{R_F}\right)V_1-\frac{1}{R_F}V_2=I_s\\&\left(\frac{\beta}{r_{be}}-\frac{1}{R_F}\right)V_1+\left(\frac{1}{R_F}+\frac{1}{R_L'}\right)V_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be}}+\frac{1}{R_F} & -\frac{1}{R_F}\\ \frac{\beta}{r_{be}}-\frac{1}{R_F} & \frac{1}{R_F}+\frac{1}{R_L'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_s\\0\end{pmatrix}$$

设〔Y〕为导纳矩阵

$$[Y]=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be}}+\frac{1}{R_F} & -\frac{1}{R_F}\\ \frac{\beta}{r_{be}}-\frac{1}{R_F} & \frac{1}{R_F}+\frac{1}{R_L'}\end{pmatrix}$$

〔V〕为电压列向量 $[V]=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}$

〔I〕为电流列向量 $[I]=\begin{pmatrix}I_1\\I_2\end{pmatrix}$

式中$I_1=I_s$ $I_2=0$

则 $[Y][V]=[I]$ 由于$[Y]\neq 0$

得到矩阵方程如下：

$[V]=[Y]^{-1}[I]$

用矩阵法可求得电压列向量，从而得出V_1和V_2的数值。

用计算机进行辅助分析时，为了得到Y矩阵（导纳矩阵）的逆，可使B＝INV（Y）实现，

于是

$$V=Y^{-1}\times I$$

可写为

$$V=B\times I$$

式中$B=y^{-1}$

然后用矩阵语句求出V矩阵各元素值。程序如下：

```
20 DIM I(2, 1), Y(2, 2), V(2, 1), B(2, 2)
30 MAT READ I, Y
40 MAT B=INV(Y)
```

```
50  MAT  V=B※I
60  PRINT "MATRIX  Y"
70  MAT  PRINT  Y;
80  PRINT "INVERSE  OF  MATRIX"
90  MAT  PRINT  B;
100 PRINT "MATRIX  I"
110 MAT  PRINT  I;
120 PRINT "MATRIX  V"
130 MAT  PRINT  V
140 DATA  I1, I2, Y11, Y12, Y21, Y22
150 END
```

2．图4为一多级电流并联负反馈放大电路，其微变等效电路见图5。

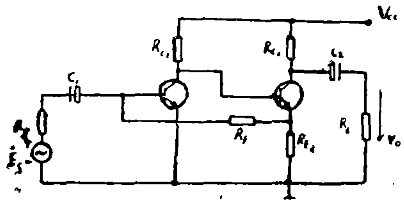

图4

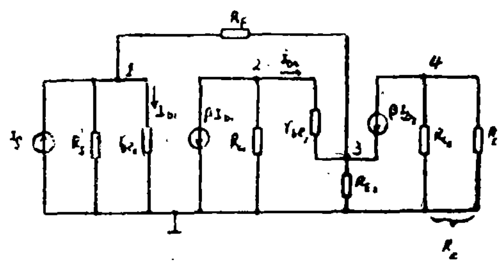

图5

为了用节点电压法建立方程组，我们可将信号源化为电流源型式，图5中的$\dot{I}_s=\frac{\dot{E}_s}{R_s}$，

$\dot{I}_{b1}=\frac{\dot{V}_1}{r_{be1}}$，$\dot{I}_{b2}=\frac{\dot{V}_2-\dot{V}_3}{r_{be2}}$，可得四元一次线性方程如下：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be1}}+\frac{1}{R_F}\right)V_1-\frac{1}{R_F}V_3=I_s\\
&\frac{\beta_1}{r_{be1}}V_1+\left(\frac{1}{R_{c1}}+\frac{1}{r_{be2}}\right)V_2-\frac{1}{r_{be2}}V_3=0\\
&-\frac{1}{R_F}V_1-\left(\frac{\beta_2}{r_{be2}}+\frac{1}{r_{be2}}\right)V_2+\left(\frac{1}{R_F}+\frac{1}{r_{be2}}+\frac{1}{R_{E2}}+\frac{\beta_2}{r_{be2}}\right)V_3=0\\
&\frac{\beta_2}{r_{be2}}V_2-\frac{\beta_2}{r_{be2}}V_3+\frac{1}{R_l'}V_4=0
\end{aligned}
\right.
$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be1}}+\frac{1}{R_F}\right) & 0 & 0 & -\frac{1}{R_F} \\ \frac{\beta_1}{r_{be1}} & \left(\frac{1}{R_{c1}}+\frac{1}{r_{be2}}\right) & -\frac{1}{r_{be2}} & 0 \\ -\frac{1}{R_F} & -\left(\frac{\beta_2}{r_{be2}}+\frac{1}{r_{be2}}\right) & \left(\frac{1}{R_F}+\frac{1}{r_{be2}}+\frac{1}{R_{E2}}+\frac{\beta_2}{r_{be2}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{r_{be2}} & -\frac{\beta_2}{r_{be2}} & \frac{1}{R'_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

导纳矩阵〔Y〕$= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{r_{be1}}+\frac{1}{R_F}\right) & 0 & 0 & -\frac{1}{R_F} \\ \frac{\beta_1}{r_{be1}} & \left(\frac{1}{R_{c1}}+\frac{1}{r_{be2}}\right) & -\frac{1}{r_{be2}} & 0 \\ -\frac{1}{R_F} & -\left(\frac{\beta_2}{r_{be2}}+\frac{1}{r_{be2}}\right) & \left(\frac{1}{R_F}+\frac{1}{r_{be2}}+\frac{1}{R_{E2}}+\frac{\beta_2}{r_{be2}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{r_{be2}} & -\frac{\beta_2}{r_{be2}} & \frac{1}{R'_L} \end{pmatrix}$$

电压列向量〔V〕$= \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$

电流列向量〔I〕$= \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

即 〔Y〕〔V〕=〔I〕

得到：〔V〕=〔Y〕$^{-1}$〔I〕

然后用计算机作辅助分析求得结果。

二、结 论

1、线性方程组可以用矩阵理论计算，因而只要电路属线性网络，就可以用矩阵法进行

求解。在电子电路中，由于晶体管、场效应管在微弱的交变信号作用下可视为线性元件，所以由它们组成的放大电路化为微变等效电路后，其各电量间的关系可以用线性方程来描述，故能用矩阵法进行计算。

2、列矩阵方程关键在于正确找出阻抗矩阵〔Z〕或导纳矩阵〔Y〕。用回路电流法列联立方程得出〔Z〕。用节点电位法列联立方程得出〔y〕。一般来说，如果网络的独立节点数少于网孔数时，並且已知的电源为电流源时（也可把电源由电压源化为电流源），采用节点电位法求解较为方便。例如本文例一的独立节点数为2，网孔数为3，用回路电流法得到的是三元一次线性方程组（见（1）式），其阻抗矩阵〔Z〕为3×3的方阵；而用节点电位法得到的是二元一次线性方程化（见（2）式），其导纳矩阵〔Y〕为2×2的方阵，后者比前者优越，运算过程大为简化。

3、若电路中的电量为时间的函数且不是线性关系时，也可用矩阵理论求解，但必须进行必要的变换，例如分析电路的瞬态响应时，需要进行拉普拉斯变换，将时间域分析变换为复频域分析，然后再经拉普拉斯反变换将复频域分析所得结果写成时间的函数，这样就可得到瞬态响应。

由上所述，对电子电路中的问题，应用矩阵理论求解，概念清晰，特别是借助于计算机进行运算，计算迅速，精确度高，不失为一个较好的方法。

参　考　文　献

〔1〕李瀚荪 《电路分析基础》 人民教育出版社

〔2〕邱关源 《电路》 人民教育出版社

〔3〕南京大学数学系计算数学专业编 《线性代数》 科学出版社

THE USE MATRIX ANALYSIS IN AMPLIFIER CIRCUIT

Cha Shijin

(Electrical engineering department)

Abstract

In this paper, by using matrix theory the problem of solving more complicated amplifier circuit has been studied. Since the rigorous matrix analysis method is applied and the computer program in developed BASICis written, the resuet of calculation is quite precise and operation is Simplified.

key words: Matrix analysis method; Amplifier circuit; Computer program