利用福里哀级数的广义平均数逼近连续周期函数

丁培贵

（数学力学系）

摘　　要

本文首先定义关于福里哀级数的广义平均值，即算子：

$$L_n(f;\ x)=\sum_{0}^{n}\lambda_k S_k/\sum_{0}^{n}\lambda_k$$

和　$$L_{n,m}(f;\ x)=\sum_{n-m}^{n}\lambda_k S_k/\sum_{n-m}^{n}\lambda_k,$$

其中S_k为f（x）的福里哀级数的k级部分和，它们分别是Fejer算子和Valle′e—Ponson算子的推广。

然后，我们证明下面定理：

定理1　设$f(x)\in C_{2\pi}$，则

$$\|L_n(f;\ x)-f(x)\|\leqslant(k_n+1)E_n^*(f)$$

其中$E_n^*(f)$为f（x）用阶不高于2n—1的三角多项式的最佳逼近。

定理2　若$f(x)\in C_{2\pi}$，则

$$\|L_{n,m}(f;\ x)-f(x)\|\leqslant(k_{n,m}+1)E^*_{n-m}(f)$$

关键词： 福里哀级数　　周期函数　　算子　　最佳逼近

设函数φ（x）在区间〔0，1〕上定义并为黎曼可积，且

$$\int_0^1\varphi^2(x)\,dx>0,\quad\sum_{s=0}^{n+2}\varphi^2\left(\frac{S}{n+2}\right)>0,\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

此外，令

$$A_k^{(n)}=\sum_{s=0}^{n-k+2}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{S+k}{n+2}\right),\quad A_n=A_0^{(n)},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

设

$$\rho_k^{(n)}=\begin{cases}A_k^{(n)}/A_n, & 当\ k<n+1\ 时,\\ 0, & 当\ k\geqslant n+1\ 时。\end{cases}$$

定义1　若对于级数 $\sum_{k=0}^{n}u_k$ 有且仅仅有

本文1987年1月3日收到。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\rho_k^{(n)}u_k=s \qquad (有限),$$

则称级数 $\sum_{k=0}^{n}u_k$ 是 (k,φ) 可和于s。

定义2 若 $f\in C_{2\pi}$，对于 $f(x)$ 的福里哀级数的部分和 s_k，考虑下列的广义平均数，并记为

$$L_n(f;x)=\frac{\lambda_0S_0+\lambda_1S_1+\cdots+\lambda_nS_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n};$$

$$L_{n,m}(f;x)=\frac{\lambda_{n-m}S_{n-m}+\lambda_{n-m+1}S_{n-m+1}+\cdots+\lambda_nS_n}{\lambda_{n-m}+\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n},$$

其中 $\lambda_k=\rho^{(n)}{}_k-\rho^{(n)}{}_{k+1}$。

定义3 若 $\varphi(x)\in C$，对于区间 $[0,1]$ 上任意x和h满足下列条件：

$$\left|\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\varphi(x+ih)\right|\leqslant M_r|h|^p,\quad(0<P\leqslant r)$$

M_r 为常数，则记 $\varphi(x)\in LiP_{M_r[0,1]}P$

引理1 设 $\varphi(x)\in LiP_{M_r[0,1]}P$，则有

$$\|\lambda_k-\lambda_{k+1}\|\leqslant\frac{2M}{\|A_n\|(n+2)}$$

其中M为仅与 φ有关的常数。

证 $$\lambda_k-\lambda_{k+1}=\rho^{(n)}{}_k-2\rho^{(n)}{}_{k+1}+\rho^{(n)}{}_{k+2}=\frac{1}{A_n}(A^{(n)}{}_k-2A^{(n)}{}_{k+1}+A^{(n)}{}_{k+2})$$

$$=\frac{1}{A_n}\Bigg\{\sum_{s=0}^{n-k+2}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{S+k}{n+2}\right)-2\sum_{s=0}^{n-k+1}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{S+k+1}{n+2}\right)$$

$$+\sum_{s=0}^{n-k}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{S+k+2}{n+2}\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{A_n}\Bigg\{\left[\sum_{s=0}^{n-k}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\left[\varphi\left(\frac{S+k}{n+2}\right)-2\varphi\left(\frac{S+k+1}{n+2}\right)+\varphi\left(\frac{S+k+2}{n+2}\right)\right]\right.$$

$$+\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{n+1}{n+2}\right)+\varphi\left(\frac{n-k+2}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)$$

$$-2\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{A_n}\Bigg\{\sum_{s=0}^{n-k}\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\left[\varphi\left(\frac{S+k}{n+2}\right)-2\varphi\left(\frac{S+k+1}{n+2}\right)-\varphi\left(\frac{S+k+2}{n+2}\right)\right]$$

$$+\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\left[\varphi\left(\frac{n+1}{n+2}\right)-\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\right]+\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\left[\varphi\left(\frac{n-k+2}{n+2}\right)\right.$$

$$-\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\Big]$$

$$\therefore\ \|\lambda_k-\lambda_{k+1}\|\leqslant\frac{1}{\|A_n\|}\left\{\sum_{s=0}^{n-k}\|\varphi\left(\frac{S}{n+2}\right)\|\,\|\varphi\left(\frac{S+k}{n+2}\right)-2\varphi\left(\frac{S+k+1}{n+2}\right)\right.$$

$$+\varphi\left(\frac{S+k+2}{n+2}\right)\|+\|\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\|\,\|\varphi\left(\frac{n+1}{n+2}\right)-\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\|+\|$$

$$\varphi\left(\frac{n+2}{n+2}\right)\|\,\|\varphi\left(\frac{n-k+2}{n+2}\right)-\varphi\left(\frac{n-k+1}{n+2}\right)\|\leqslant\frac{1}{\|A_n\|}\Big\{LM_2$$

$$\left.\cdot\frac{n-k+1}{(n+2)^2}+\frac{2LM_1}{n+2}\right\}\leqslant\frac{M}{\|A_n\|}\left\{\frac{n-k+1}{(n+2)^2}+\frac{1}{n+2}\right\}$$

即可得

$$\|\lambda_k-\lambda_{k+1}\|\leqslant\frac{2M}{\|A_n\|(n+2)}\ .$$

其中 $\|\varphi\|=L$，$M=\max\{LM_2,\ 2LM_1\}$。

引理2 设$f\in C_{2\pi}$，则

$$\|L_n(f;\ x)\|\leqslant\frac{(n+1)M}{\|A_n\|}\|f\|$$

证 由$\rho_k^{(n)}$定义及$\rho_{n+1}^{(n)}=0$，于是有

$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\rho_0^{(n)}-\rho_1^{(n)}+\rho_1^{(n)}-\rho_2^{(n)}+\cdots+\rho_n^{(n)}-\rho^{(n)}_{n+1}=\rho^{(n)}_0=1,$$

这时算子$L_n(f;\ x)$实际为

$$L_n(f;\ x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k S_k,$$

引入费耶尔和$\sigma_n(f;\ x)=\dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$，并利用阿贝尔变换

$$\sum_{k=0}^{n}a_k b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_0B_n,$$

其中 $B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$，于是有

$$L_n(f;\ x)=\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})(k+1)\sigma_k+\lambda_n(n+1)\sigma_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k+1})(k+1)\sigma_k$$

其中σ_k为k级费耶尔和，即$\sigma_k=\dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_k}{k+1}$，这是由于$\lambda_{n+1}=\rho_{n+1}-\rho_{n+2}=0$，故可

得出

$$\| L_n(f;x) \| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \| \lambda_k - \lambda_{k+1} \| (k+1) \| \sigma_k \|,$$

利用引理1及估计式

$$\| \sigma_n \| \leqslant \| f \|。$$

事实上，由于费耶尔的奇异积分

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt,$$

即有

$$\| \sigma_n(f;x) \| \leqslant \frac{\| f \|}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt = \| f \|。$$

因而得到

$$\| L_n(f;x) \| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2M \| f \|}{\| A_n \| (n+2)} (k+1),$$

$$= \frac{2M \| f \|}{\| A_n \| (n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{M(n+1)}{\| A_n \|} \| f \|$$

引理得证。

引理3 设$f \in C_{2\pi}$，则

$$\| L_{n,m}(f;x) \| \leqslant \frac{(2n-m+1)M}{\| A_{n-m} \|} \| f \|。$$

证 由定义

$$\| L_{n,m}(f;x) \| = \frac{\lambda_{n-m}S_{n-m} + \lambda_{n-m+1}S_{n-m+1} + \cdots + \lambda_n S_n}{\lambda_{n-m} + \lambda_{n-m+1} + \cdots + \lambda_n}.$$

而 $\sum_{k=0}^{m} \lambda_{n-k} = \rho_{n-m} - \rho_{n-m+1} + \rho_{n-m+1} - \rho_{n-m+2} + \cdots + \rho_n - \rho_{n+1} = \rho_{n-m}$

并令 $\lambda_{n-m-1} = 0$和$\lambda_{n+1} = 0$，利用阿贝尔变换，则有

$$\sum_{k=n-m}^{n} \lambda_k S_k = \sum_{k=n-m}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_n S_n - \lambda_{n-m} S_{n-m-1}$$

$$= \sum_{k=n-m-1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k$$

其中 $S_k = S_0 + S_1 + \cdots + S_k$，于是

$$\sum_{k=n-m}^{n} \lambda_k S_k = \sum_{k=n-m-1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1})(k+1)\sigma_k$$

$$\therefore \quad \| L_{n,m}(f;x) \| \leqslant \frac{1}{\| \rho_{n-m} \|} \sum_{k=n-m-1}^{n} \| \lambda_k - \lambda_{k+1} \| \, \| \sigma_k \| (k+1)$$

由引理1即得

$$\| L_{n,m}(f;x) \| \leqslant \frac{1}{\| \rho_{n-m} \|} \cdot \frac{2M \| f \|}{\| A_n \| (n+2)} \sum_{k=n-m-1}^{n} (k+1)$$

$$= \frac{2M \| f \|}{\| A_{n-m} \| (n+2)} \cdot \frac{(2n-m+1)(m+2)}{2}$$

$$\leqslant \frac{(2n-m+1)M}{\| A_{n-m} \|} \| f \|$$

引理得证。

下面证明本文的主要结果：

定理1　设 $f \in C_{2\pi}$，则

$$\| L_n(f;x) - f(x) \| \leqslant (k_n+1) E_n^*(f)$$

其中$E_n^*(f)$表示$f(x)$用阶不高于$2n-1$的三角多项式的最佳逼近度，

$$k_n = \frac{(n+1)M}{\| A_n \|}.$$

证　设$t_n^*(x)$为$f(x)$的最佳逼近三角多项式，记

$$\| f(x) - t_n^*(x) \| = E_n^*(f)$$

由于$L_n(f;x)$为线性正算子，显然有

$$L_n(t_n^*;x) = t_n^*(x) \qquad 故$$

$$L_n(f;x) - f(x) = L_n(f - t_n^*) + L_n(t_n^*) - f(x)$$

故有

$$\| L_n(f;x) - f(x) \| \leqslant \| L_n(f - t_n^*) \| + \| L_n(t_n^*) - f(x) \|$$
$$= \| L_n(f - t_n^*) \| + \| t_n^* - f(x) \|$$

利用引理2即得

$$\| L_n(f;x) - f(x) \| \leqslant \frac{(n+1)M}{\| A_n \|} \| f - t_n^* \| + \| t_n^* - f \|$$

$$= (k_n+1) E_n^*(f)。$$

其中　$k_n = \dfrac{(n+1)M}{\| A_n \|}$，证毕。

定理2　若　$f(x) \in C_{2\pi}$，则下面不等式成立：

$$\| L_{n,m}(f;x) - f(x) \| \leqslant (k_{n,m}+1) E^*_{n-m}(f)。$$

其中　$k_{n,m} = \dfrac{(2n-m+1)M}{\| A_{n-m} \|}$

证　由于$L_{n,m}$为线性正算子，故

$$L_{n,m}(f;x)-f(x)=L_{n,m}(f-t^*_{n-m}+t^*_{n-m})-f(x)$$

$$\therefore\ \|L_{n,m}(f;x)-f(x)\|\leqslant\|L_{n,m}(f-t^*_{n-m})\|+\|L_{n,}(t^*_{n-m})-f(x)\|$$

$$=\|L_{n,m}(f-t^*_{n-m})\|+\|t^*_{n-m}-f(x)\|$$

$$\leqslant\frac{(2n-m+1)M}{\|A_{n-m}\|}\|f-t^*_{n-m}\|+\|t^*_{n-m}-f(x)\|$$

$$=(k_{n,m}+1)E^*_{n-m}(f)。$$

其中 $k_{n,m}=\dfrac{(2n-m+1)M}{\|A_{n-m}\|}$，定理证毕。

在我们定理中，若取 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\text{时},\\ 0, & x=0,\ x=1\text{时},\end{cases}$ 则此时有

$$\rho^{(n)}_k=\frac{A^{(n)}_k}{A_n}=\frac{n-k+1}{n+1},\ k=1,2,\cdots,n。$$

$$\therefore\ \lambda_k=\rho^{(n)}_k-\rho^{(n)}_{k+1}=\frac{n-k+1}{n+1}-\frac{n-k}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

得出 $L_n(f;x)=\dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}=\sigma_n$,

即算子$L_n(f;x)$成为费耶尔算子，同理

$$\lambda_{n-m}+\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n=\rho^{(n)}_{n-m}=\frac{n-(n-m)+1}{n+1}=\frac{m+1}{n+1}$$

而

$$L_{n,m}(f;x)=\frac{\frac{1}{n+1}(S_{n-m}+S_{n-m+1}+\cdots+S_n)}{\frac{m+1}{n+1}}=\frac{S_{n-m}+S_{n-m+1}+\cdots+S_n}{m+1}$$

成为熟知的广义Valle′e—Ponsson算子$J_{n,m}(f;x)$。

即

$$L_{n,m}(f;x)=J_{n,m}(f;x)。$$

于是相应地由本文定理可推出熟知的下面定理[1]：

$$\|L_{n,m}\|=\|J_{n,m}\|\leqslant\frac{2n-m+1}{m+1}\|f\|,$$

和

$$\|L_{n,m}(f;x)-f(x)\|\leqslant\frac{2(n+1)}{m+1}E^*_{n-m}(f)。$$

参 考 文 献

〔1〕《实变函数逼近论》 杭州大学 1981年

〔2〕 A.Zygmund Trigonomatrical series 1959年

〔3〕 丁培贵 《利用福里哀级数的（K，φ）平均数逼近连续周期函数》《数学杂志》 1983年第三期。

THE APPROXIMATION OF CONTINUOUS PERIODIC FUNCTIONS BY GENERALIZED MEAN OF FOURIER SERIES

Ding Peigui

(mathematics and mechanics Department)

Abstract

In this paper, we first define the generalized mean for Fourier series, i.e. operator

$$L_n(f;x)=\sum_{0}^{n}\lambda_k S_k/\sum_{0}^{n}\lambda_k.$$

and $L_{n,m}(f;x)=\sum_{n-m}^{n}\lambda_k S_k/\sum_{n-m}^{n}\lambda_k$

Where S_k is the K—th partial sum of Fourier series to the function $f(x)$; they are the generalized forms of Fejer's operator and Valle'e—Pousou's operator respectively.

Next, we prove the following theorems:

Theorem 1 Let $f(x)\in C_{2\pi}$, then

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|\leqslant(k_n+1)E_n^*(f)$$

Where $E_n^*(f)$ is the best approximation of $f(x)$ by trigonomatric polynomial with degree not more than $2n-1$.

Theorem 2 Let $f(x)\in C_{2\pi}$, then

$$\|L_{n,m}(f;x)-f(x)\|\leqslant(k_{n,m}+1)E^*_{n-m}(f)$$

Key words:

fourier series, periodic functions, operator, best approximation.