无限大板中心裂纹应力强度因子

丁 遂 栋

（数力系）

提　要

本文提出无限大板中心裂纹应力强度因子的一个普遍表达式，并对该表达式的普遍性进行了详细的讨论。

关键词： 板、裂纹、应力强度因子

本文从平面应力分析出发，变换边界条件，利用线弹性断裂力学理论得到无限大板中心裂纹应力强度因子的一个普遍表达式，由此表达式可直接推论出在一系列特殊情况下无限大板中心裂纹应力强度因子计算公式，其中包括Sih，Paris，Rooke，Tada和Irwin等用复变应力函数法及Westergaard应力函数法求得的解答。

一、无限大板中心裂纹应力强度因子的普遍表达式

在工程实际中，往往会遇到无限大板中心裂纹的一般情况，如图1所示，即无限大板中有一长为2a的中心裂纹，双向承受拉应力和剪应力分别为$\alpha\sigma$，σ，和$\eta\sigma$，裂纹与应力σ作用方向的夹角为β。

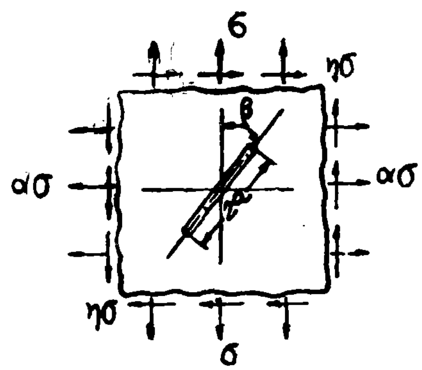

图　1

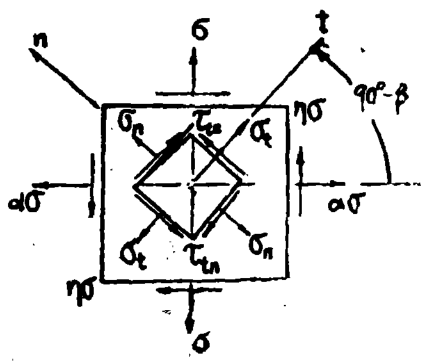

图　2

对图1所示具有中心穿透裂纹的无限大板，若在距裂纹无穷远处取出一个单元体，其受力情况如图2所示。利用平面应力分析的解析法或莫尔园法可求得法线分别与裂纹线平行及垂直的t和n方向的斜截面上的正应力和剪应力为

本文1986年12月20日收到。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_t &= \frac{\alpha\sigma+\sigma}{2} + \frac{\alpha\sigma-\sigma}{2}\cos 2(90^\circ-\beta) + \eta\sigma\sin 2(90^\circ-\beta) \\
\delta_n &= \frac{\alpha\sigma+\sigma}{2} + \frac{\alpha\sigma-\sigma}{2}\cos 2(180^\circ-\beta) + \eta\sigma\sin 2(180^\circ-\beta) \\
\tau_{tn} &= \sigma(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta - \eta\sigma\cos 2\beta
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

简化并整理得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_t &= \sigma[\ (\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta) + \eta\sin 2\beta\ ] \\
\sigma_n &= \sigma[\ (\sin^2\beta+\alpha\cos^2\beta) - \eta\sin 2\beta\ ] \\
\tau_{tn} &= \sigma[\ (1-\alpha)\sin\beta\cos\beta - \eta\cos 2\beta\ ]
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

于是图1所示的无限大板中心裂纹的情况就变成图3所示的情况。

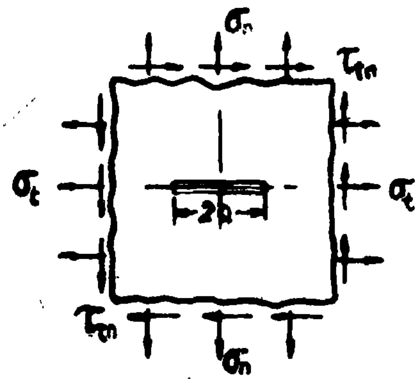

图 3

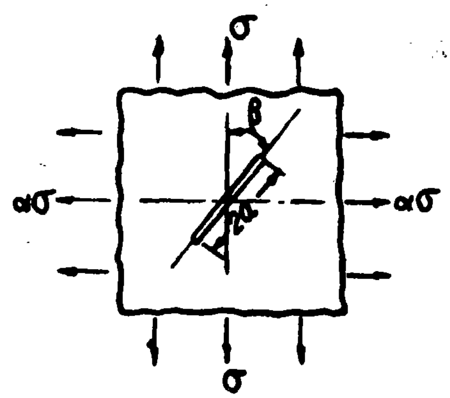

图 4

这就是说在距裂纹为无穷远处其边界条件进行了变换，于是根据线弹性断裂力学理论可得出

$$\left.\begin{aligned}
K_{I} &= \sigma_n\sqrt{\pi a} = [\ (\sin^2\beta+\alpha\cos^2\beta) - \eta\sin 2\beta\ ]\sigma\sqrt{\pi a} \\
K_{II} &= \tau_{tn}\sqrt{\pi a} = [\ (1-\alpha)\sin\beta\cos\beta - \eta\cos 2\beta\ ]\sigma\sqrt{\pi a}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

（3）式实为图1所示的无限大板中心裂纹应力强度因子的表达式。

二、应力强度因子表达式的普遍性讨论

上述（3）式是无限大板中心裂纹应力强度因子的一个普遍表达式。根据（3）式可以直接推论得到无限大板在许多情况下的应力强度因子计算公式。讨论如下：

①当$\eta=0$时，得到图4所示受双向拉伸斜裂纹的情况

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned}
K_{I} &= (\sin^2\beta+\alpha\cos^2\beta)\sigma\sqrt{\pi a} \\
K_{II} &= (1-\alpha)\sin\beta\cos\beta\sigma\sqrt{\pi a}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

（4）式与Sih，Paris，和Rooke等用复变应力函数法求得的公式完全一致。

②当$\eta=0$，$\beta=90°$时，得到图5所示双向拉伸的Griffith裂纹情况。

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned}K_I&=\sigma\sqrt{\pi a}\\K_{II}&=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

③当$\eta=0$，$\beta=0$时，得到图6所示情况。

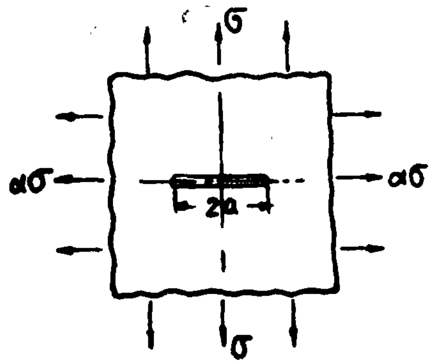

图　5

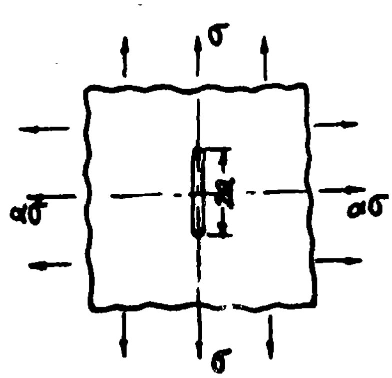

图　6

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned}K_I&=\alpha\sigma\sqrt{\pi a}\\K_{II}&=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

④当$\eta=0$，$\alpha=1$时，得到图7所示双向等拉斜裂纹情况。

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned}K_I&=\sigma\sqrt{\pi a}\\K_{II}&=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

⑤当$\eta=0$，$\alpha=1$，$\beta=90°$或$0°$时，得到图8所示双向等拉的Griffith裂纹情况。

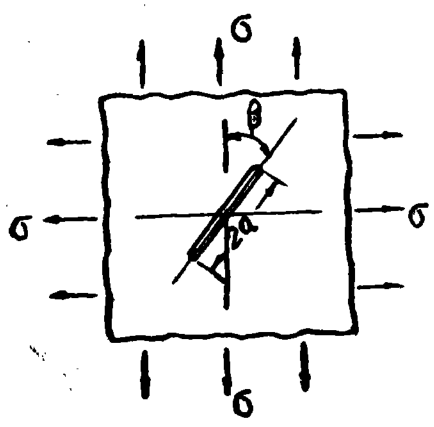

图　7

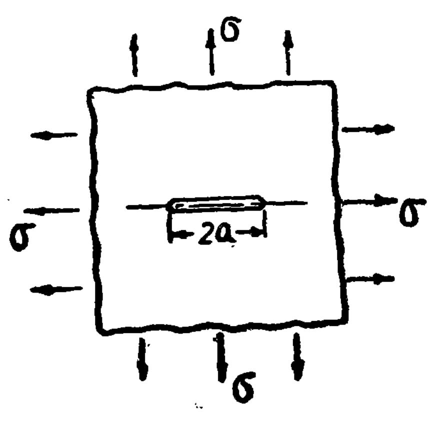

图　8

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{I} &= \sigma\sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

⑥当$\eta=0$，$\alpha=0$时，得到图9所示单向拉伸斜裂纹情况。

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{I} &= \sin^{2}\beta\sigma\sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \sin\beta\cos\beta\sigma\sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

此式与Paris和Sih等用Westergaard应力函数法求得的解答完全一致。

⑦当$\eta=0$，$\alpha=0$，$\beta=90°$时，得到图10所示情况。

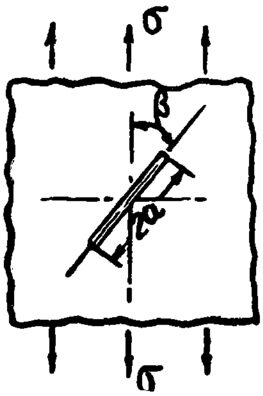

图 9

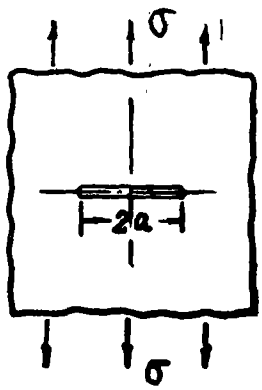

图 10

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{I} &= \sigma\sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

⑧当$\alpha=0$时，得到图11所示情况。

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{I} &= (\sin^{2}\beta-\eta\sin2\beta)\sigma\sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= (\sin\beta\cos\beta-\eta\cos2\beta)\sigma\sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

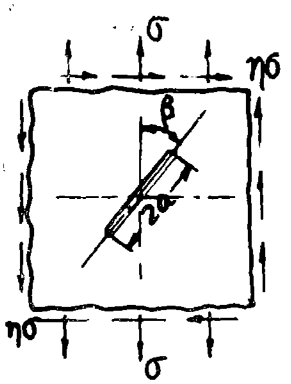

图 11

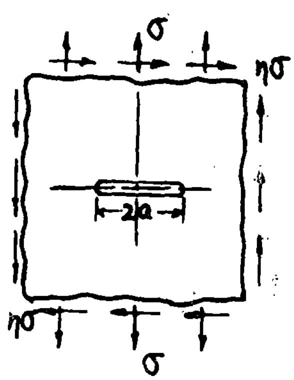

图 1

⑨当$\alpha=0$，$\beta=90^\circ$时，得到图12所示的情况。

由（3）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \sigma\sqrt{\pi a} \\ K_{\mathrm{II}} &= \eta\sigma\sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

此式与Tada，Paris和Irwin用Westergaard应力函数法求得的解答完全一致。

⑩在（3）式中，若用τ表示$\eta\sigma$，则（3）式可写成

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= [\sigma(\sin^2\beta+\alpha\cos^2\beta)-\tau\sin 2\beta]\sqrt{\pi a} \\ K_{\mathrm{II}} &= [\sigma(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta-\tau\cos 2\beta]\sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中当$\sigma=0$时，就得到图13所示的情况。

由（13）式得

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= -\tau\sin 2\beta\sqrt{\pi a} \\ K_{\mathrm{II}} &= -\tau\cos 2\beta\sqrt{\pi a} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

若利用上式中的第一式计算K_{I}为负值，则说明在与裂纹垂直方向的正应力为压应力，压应力不会引起裂纹张开，故K_{I}无意义。由第二式计算K_{II}为负值时，负号表示裂纹所受剪应力方向与Griffith经典裂纹所描述的剪应力方向相反，K_{II}可取其绝对值。

⑪当$\sigma=0$，$\beta=90^\circ$时，得到图14所示Griffith第II型经典裂纹情况。

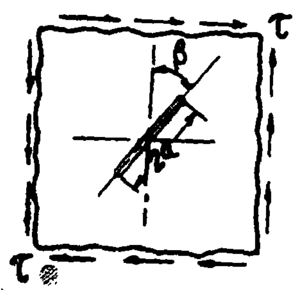

图　13

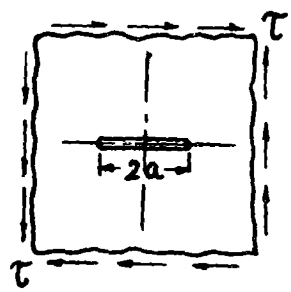

图　14

由（13）式得

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= 0 \\ K_{\mathrm{II}} &= \tau\sqrt{\pi a} \end{aligned} \tag{15}$$

综上所述，可见（3）式对无限大板中心裂纹应力强度因子的求解具有一定的普遍性，故称为无限大板中心裂纹应力强度因子的普遍表达式。

三、结　束　语

无限大板中心裂纹应力强度因子的普遍表达式，不仅适用于无限大板中心裂纹的一般情况，而且可直接推论得到上述各种特殊情况下的应力强度因子计算公式，这无疑有重要的实用价值。

参 考 文 献

[1] 中国航空研究院主编 《应力强度因子手册》 1981。

[2] 范天佑编著 《断裂力学基础》，1978。

[3] 诸武扬编著 《断裂力学基础》，1979。

[4] Tada, H·, Paris, P·C· and Irwin, G.R·, The Stress Analysis of Cracks Handbook, 1973, Del Research·Corp·, Hellertown, Pa·

[5] Paris, P·C· and Sih, G· C·, ASTMSTP381, P· 30, 1965·

[6] Rooke, D·P·and Cartwright, D·J·, Compendium of Stress Intensity Factors, 1976, London Her Majesty's Stationery office·

[7] Sih, G·C·, Paris, P·C·and Erdogan, F·J·, Appl·Mech·, 29, P·306, 1962·

Stress Intensity Factor of Centre Crack for Infinite Plate

Ding Sui dong

(DePt·of Math·and Mech·)

Abstract

For the analysis of plane stress, the boundary conditions are transformed and a general expression of stress intensity factor of centre crack for the infinite plate is obtained by utilizing linear elastic fracture mechanics theory in this paper. From this expression, a series of calculating formulas of stress intensity factors for the infinite plate under a series of exceptional circumstances, which include the solutions obtained by Sih, paris, Rooke, Tada and Irwin etc. with complex stress function method and Westergaard stress function method, are directly inferred.

key Words: Plate, Crack, Stress Intensity Factor