狭义相对论的建立及超光速问题的讨论

袁　升　兴

（物理教研室）

提　　要

本文首先简略地介绍了伽利略和罗仑兹两大变换的内容、特点及其协变式，并在此基础上引出了狭义相对性原理和光速不变原理。最后对罗仑兹变换与超光速之间的关系进行了讨论。

狭义相对论的基础是狭义相对性原理和光速不变原理。狭义相对论的建立也就是这两条基本原理的形成。那么产生这两条基本原理的客观依据和指导思想是什么？本文首先从讨论伽利略、罗仑兹两个坐标变换的性质入手，进而引出了狭义相对论的基本原理，最后对罗仑兹变换和超光速问题进行了讨论。

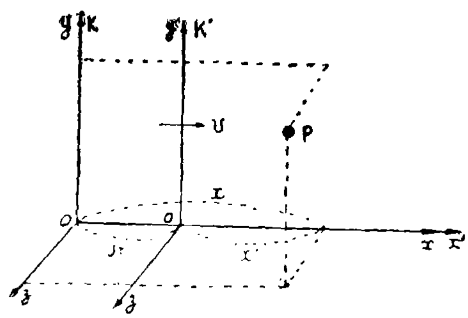
一、伽利略变换和罗仑兹变换

经典物理学的运动规律，粗略地说可分为机械运动和电磁运动两大系统，它们分别遵从牛顿定律和麦克斯韦方程。而分子热运动则是在这两类运动规律的基础上再加统计规律。在狭义相对论诞生以前，这两大运动规律从理论到实践都发展到了光辉的"顶峰"，并且各自遵从伽利略变换和罗仑兹变换。

1．伽利略变换对牛顿定律是协变式。

①伽利略坐标变换：

设有两个惯性系K和K′的对应坐标轴在开始时重合，并且K′系以速度υ沿x轴的正方向运动。若空间有一静止质点p，在某时刻t其空时坐标分别为p（x，y，z，t）和p（x′，y′，z′，t′），这两个坐标的关系可由图一看出：



$$\left.\begin{array}{l} x' = x - \upsilon t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t \\ \text{或}\quad x = x' + \upsilon t',\ y = y',\ z = z',\ t = t' \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(1)$$

这就是伽利略变换。其特点是：时空是独立的，相互间无联系；时空与运动无关。而在空间任意两点间的距离不变。例如在图二K 系中1和2两点的距离为

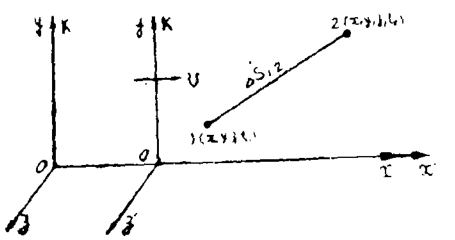


图 1

$$\Delta S_{1,2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2'-z_1')^2},$$

若把伽利略变换中的x、y、z之值代入上式则得：

$$\Delta S_{1,2}=\sqrt{[(x_2'+vt)-(x'+vt')]^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}$$
$$=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}=\Delta S_1',_2$$

说明空间任意两点间的距离在两惯性系中不变。同时也看出某事件发生的时间间隔在两惯性系中也不变，即$\Delta t=t_2-t_1=t_2'-t_1'=\Delta t'$。

②伽利略速度变换公式。若p 点为动点，则对（1）式两边的时间求一阶导数，便得其速度分量的变换公式，即

$$u_x'=u_x-v,\ u_y'=u_y,\ u_z'=u_z \qquad \cdots\cdots(2)$$

或 $u_x=u_x'+v,\ u_y=u_y',\ u_z=u_z'$

由此可得：$\vec{u'}=(u_x-v)\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}=\vec{u}-v\vec{i}$ 或 $\vec{u}_{物对K}=\vec{u'}_{物对K'}+\vec{v}_{K'对K}$

这正是伽利略速度合成定理。由于质点在两惯性系中的相对速度只差一个常数，所以质点的运动是相对的。

③伽利略变换对牛顿定律协变。

若对速度变换公式（2）两边的时间再求一次导数，则得运动质点的加速度分量：

$a_x'=a_x,\ a_y'=a_y,\ a_z'=a_z$

即 $a'=\sqrt{a_x'^2+a_y'^2+a_z'^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=a_x$，合加速度相等。在牛顿力学中由于质点的质量是个常数，$m=m'$。故$\vec{F}=m\vec{a}=m'\vec{a'}=\vec{F'}$。说明力是绝对的，即伽利略变换对牛顿定律协变。由于牛顿力学中的动量、动能等定理及其守恒定律都是由牛顿定律导出的，所以这些定律在各惯性系中的形式也是不变的。由此我们看出，在牛顿力学中，质点的运动状态是相对的，但运动规律是不变的。这就是伽利略的力学相对性原理，即力学定律的形式在所有惯性系中都是相同的。这句话的实质就是对力学定律没有优越的惯性系。

2．罗仑兹变换对麦克斯韦方程是协变式。

①罗仑兹变换：罗仑兹为了说明电磁场相互作用的性质和运动规律，引用了“以太”的概念，并取得了暂时的成功。他于1885年发现了带电物体相对于静止“以太”的坐标变换，称之为罗仑兹变换。它和伽利略变换一样，也是个线性方程组，可对伽利略变换进行修正和利用光在“以太”中的速度都是C 而得到，即

$$\left.\begin{array}{ll} x'=\gamma(v)\cdot(x-vt)\cdots\cdots(3-1) & x=\gamma(-v)\cdot[x'-(-v)t']\cdots\cdots(3-1)' \\ y'=\delta(v)\cdot y\cdots\cdots(3-2)\text{或} & y=\delta(-v)\cdot y'\cdots\cdots(3-2)' \\ z'=\delta(v)\cdot z\cdots\cdots(3-3) & z=\delta(-v)\cdot z'\cdots\cdots(3-3)' \end{array}\right\}(3)$$

式中$\gamma(v)$和$\delta(v)$是修正系数，它们都是速度v的偶函数，即$\delta(v)=\delta(-v)$，$\gamma(v)=\gamma(-v)$。这是由时空的均匀性决定的，它表示两惯性系的相对运动向左向右其结果都一样。方程所以是线性的，一方面仍由时空的均匀性决定，另一方面匀速运动（对惯性系）的轨迹一定是变量为一次幂的线性方程。修正系数$\delta(v)$及$\gamma(v)$之值，很易确定：若把（3－2）式与（3－2）′式相乘则得：$yy'=\delta(v)^2\cdot yy'$，所以$\delta^2(v)=1$，即$\delta(v)=\pm1$。为了使新的坐标变换能回到伽利略变换，故取$\delta(v)=+1$

当K和K′系的坐标原点重合时，发一光信号，由于光速不变，则 $x=ct$ 及 $x'=ct'$，并代入（3－1）和（3－1）′两式乘积的两边：

$xx'=\gamma^2(v)(x-vt)\cdot(x'+vt)$，则得

$c^2tt'=\gamma^2(v)[ct-vt]\cdot(ct'-vt')=\gamma^2(v)tt'(c^2-v^2)$

整理后则得到$\gamma(v)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\left(\beta=\dfrac{v}{c}\right)$，并且也取正值，原因同前。由此可得：

$$\left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\dfrac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}\right. \cdots\cdots(4)$$

这就是罗仑兹变换。由此看出该方程的特点是：时空不是独立的，而是相互联系的；时空与运动速度 v 有关。若用四维坐标表示，令：$x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$，$x_4=ict$，这里$i=\sqrt{-1}$。罗氏变换可写成如下形式：

$$\left\{\begin{array}{l} x'_1=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+\dfrac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x_4 \\ x'_2=0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4 \\ x'_3=0\cdot x_1+0\cdot x_3+1\cdot x_3+0\cdot x_4 \\ x'_4=\dfrac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x_4 \end{array}\right.$$

该变换还可简写成$x'_\alpha=\sum\limits_{\gamma=1}^{4}a_{\alpha\gamma}x_\gamma$此处转换系数$a_{\alpha\gamma}$可用矩阵来表示：

$$a_{\alpha\gamma}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

在四维时空坐标中，任意无限接近的两点间的距离ds为不变量，

即$ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2}=\sqrt{dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2+dx_4'^2}=ds'$。说明了时空的统一性。

②罗仑兹速度变换公式。若对（4）式两边求微分，即$dx=\frac{dx'+\upsilon dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$dy=dy'$，$dz=dz'$，$dt=\frac{dt'+\frac{\upsilon}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$。由此可得罗仑兹的速度变换公式：

$$\begin{cases} u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{u_x'+\upsilon}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x} \\ u_y=\frac{dy}{dt}=\frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x} \\ u_z=\frac{dz}{dt}=\frac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\upsilon}{c^2}u'_x} \end{cases} \text{代入}(-\upsilon)\text{则} \begin{cases} u_x'=\frac{u_x-\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \\ u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \\ u_z'=\frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x} \end{cases} \quad\cdots\cdots(6)$$

其合速度为$u=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$,或$u'=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2}$。式中$\upsilon$表示两惯性系之间的速度，u或u′表示质点相对两惯性的速度。由此可以看出，对于小于光速的粒子用速度合成的方法不能使其速度大于光速。

③罗仑兹变换对波动方程协变[1]。

真空中描写电磁场传播的标、矢量势所遵从的波动方程为：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

式中势函数$\phi=\phi(x, y, z, t)$，c为波速。若先对上式K系中的坐标x求偏导，并通过罗氏变换（4）用K′系中坐标的偏导来表示则为：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}。$$

由罗氏变换可知：

$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\frac{\partial y'}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z'}{\partial x}=0$，$\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$。并代入上式中的$\frac{\partial\phi}{\partial x}$则

得：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\partial\phi}{\partial t'}\cdot\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}。$$

再对 x 求一次偏导数为：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'}\cdot\frac{\frac{v}{c^2}}{1-\beta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}\cdot\frac{\frac{v^2}{c^4}}{1-\beta^2};$$

用同样方法对其余变量y、z、t求偏导则有：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2};\qquad\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2};$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}\cdot\frac{v^2}{1-\beta^2}-2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'}\cdot\frac{v}{1-\beta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}。$$

把以上诸式代入波动方程（7）整理可得：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}=0$$

从而证明了罗氏变换对波动方程协变。

④电磁场的统一性。

在麦氏方程的表示式中，若引入电磁场的张量$F_{\mu v}$：

$$F_{\mu v}=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y & -iE_x\\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y\\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{pmatrix}$$

则电磁场的变换关系满足张量式：

$$F'_{\mu v}=\sum_{\alpha,\gamma}a_{\mu\alpha}a_{v\gamma}F_{\alpha\gamma}\qquad\cdots\cdots(8)$$

式中转换系数$a_{\alpha\gamma}$由（5）式给出。由此可求得三维空间的电磁量的关系为：

$$\begin{cases}E'_x=E_x & B_x'=B_x\\ E_y'=\dfrac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & B_y'=\dfrac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ E_z'=\dfrac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & B_z'=\dfrac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots(9)$$

从而可证明麦氏方程在各惯性系中的电磁场量是不变的，即：

$$B_x'^2+B_y'^2+B_z'^2+E_x'^2+E_y'^2+E_z'^2=B_x^2+B_y^2+B_z^2+E_x^2+E_y^2+E_z^2$$

这就说明了电磁场的统一性。当然最后把电磁场统一起来的不是麦克斯韦，他只是通过电磁感应定律找到了电磁场之间的联系。而把电场和磁场看成是一个场的两个方面，彻底统

一起来的应该是爱因斯坦。

在不同的惯性系中，场力的形式是不变的，但场力的大小是相对的。例如在两个惯性系中场力的公式分别为：

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}),\quad \vec{F}'=q'(\vec{E}'+\vec{u}'\times\vec{B}')$$

由于电荷是守恒的$q=q'$，而场量的变换和速度的变换由（6）、（9）式确定，代入$\vec{F}$或$\vec{F}'$式便得：

$$\left\{\begin{aligned} F_x&=\frac{F_x'+\frac{v}{c^2}(\vec{F}'\cdot\vec{u}')}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}\\ F_y&=\frac{F_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}\\ F_z&=\frac{F_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}\end{aligned}\right.\quad \text{或}\quad \left\{\begin{aligned} F_x'&=\frac{F_x-\frac{v}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{u})}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\\ F_y'&=\frac{F_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\\ F_z'&=\frac{F_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\end{aligned}\right.$$

说明采用罗仑兹变换得出的场力的大小是相对的，这与牛顿力学认为场力经过伽利略变换后不变相矛盾。

二、狭义相对论基本原理的提出

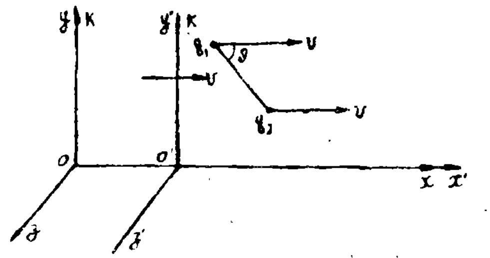
1．狭义相对性原理。

罗仑兹本人是“以太”理论的维护者，他认为“以太”完全静止不动并充满整个宇宙空间，而运动的物体对“以太”也没有影响，物体只是在“以太”中运动。这个理论与裴索的流水实验和布拉特莱的光行差测量相符合，但却与迈克耳逊—莫雷实验相矛盾。前者说明了“以太”不被运动物体所带动；而后者却说明了“以太”被运动的地球所拖动。这就有两种可能：一种是地球相对于静止的“以太”是静止的，而日、月、星、辰则在静止的“以太”中绕地球运动，这种地球中心说的理论显然不会再被人们所接受；另一种则是“以太”根本不存在。这些实验事实迫使人们不得不抛弃“以太”理论。

否定“以太”存在的实质就是没有优越的惯性系，这种思想首先由爱因斯坦作为一个假说提出，即物理学的基本定律在所有惯性系中都取同一形式。后来被实践所证实，人们称之为狭义相对性原理。狭义一词的含义有两点：一是指参照系不能任意选取，必须是惯性系；二是指时空是均匀的，不考虑引力场对时空的影响。从这条原理中还可清楚地看出，所谓相对性实际上指的却是不变性，即运动规律在所有惯性系中的绝对性。

2．光速不变原理。

狭义相对性原理只是说明没有优越的惯性系，但伽利略变换仍不能使麦氏方程协变，还是没有解决麦氏方程满足狭义相对性原理问题。前面已经指出场力是相对的，不是绝对的，



与伽利略变换结果相矛盾。例如有两个相对于K系以速度v运动的电荷q_1和q_2，其连线与运动方向有一倾角θ时（图三）[2]。根据麦氏方程和罗仑兹力公式将出现一力偶，这样对随着电荷一起运动的K′系来说，就意味着静止电荷间的相互作用力不服从库仑定律。也不满足伽利略变换。这就是说，伽利略变换只对牛顿定律协变，而对麦氏方程则不成立。

如何寻找一个既对牛顿定律又对麦氏方程都适用的坐标变换呢？可采用两种不同的路径：第一是肯定伽利略变换，保留牛顿定律的形式，而对麦氏方程进行修改，使之符合伽利略变换。走这条路看来比较省劲；第二是肯定麦氏方程，使其在各惯性系中的形式不变，从而修改伽利略变换，同时也要修改牛顿定律的形式。走这条路不但难度大，而且还要冒风险，胆量也要大。因为当时牛顿力学已发展到所谓登峰造极的地步，传统的经典时空观根深蒂固，完美的理论不但使人信服，而且在当时的条件下也被实践证明是正确的，谁也不敢触动。爱因斯坦所以果断地选取第二条路来走，就是因为他深知麦氏方程的普遍性和坚信狭义相对性原理的正确性，肯定麦氏方程在任何惯性系中应该等效，即满足狭义相对性原理。用他自己的话来说："是那股时代潮流（即承认麦克斯韦理论，认定它满足相对性原理）的继续和革新"。如果要保证这个观点成立，就必须采用罗仑兹变换，而罗氏变换则是以光速不变为基础的。所以爱因斯坦提出了第二个假说：在任何惯性系中，光（或场相互作用）在真空中的传播速度都是相同的，均为30万公里／秒，并且和光源及观察者的相对运动无关。这也与实际相结合，人们称之为光速不变原理。爱因斯坦同时对牛顿定律进行了修改，建立了更普遍的相对论力学，成为当代物理学的两大支柱之一。

三、关于罗仑兹变换与超光速问题

若把罗仑兹速度变换公式（6）代入$u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$式：并利用u和u′及其分量之间的关系整理即得：

$$\left(1+\frac{vu_x'}{c^2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right) \qquad \cdots\cdots(10)$$

由于$\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)^2>0$，而且在$v<c$的条件下，也就是当$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)>0$时，则u、u′和光速c的关系可得以下三种结果：

1．当$|u'|=c$即$1-\frac{u'^2}{c^2}=0$时，则$1-\frac{u^2}{c^2}=0$，可得$|u|=c$；反之亦然，既当$|u|=c$时，可得$|u'|=c$。这与光子的情况相对应。

2．当$|u'|<c$即$1-\frac{u'^2}{c^2}>0$时，则$1-\frac{u^2}{c^2}>0$，可得$|u|<c$；反之亦然，当$|u|$

$<c$ 时，可得 $|u'|<c$。这与通常粒子（慢子）情况相对应。

3．当 $|u'|>c$ 即 $1-\frac{u'^2}{c^2}<0$ 时，则 $1-\frac{u^2}{c^2}<0$，可得 $|u|>c$；反之亦然，当 $|u|>c$ 时，可得 $|u'|>c$。这与超光速粒子（快子）情况相对应。

由此得出结论：只要惯性系之间的相对速度小于光速c，那么一个物体对一惯性系的速度等于、小于或大于光速 c，则它在任意惯性系中的速度必然也等于、小于或大于光速 c。前两种情况与实际相符合，后一种情况也是合理的，正是我们所希望的。有人认为罗仑兹变换宣判了超光速粒子的死刑，其实这种想法是不合适的。因为物体相对惯性系的速度与惯性系之间的相对速度是两个不同的范畴，应该予以区别。实际上也不应该把在任何惯性系中的粒子，无论用运动学（速度合成）的方法还是用动力学（施加力）的方法，都不能使粒子的速度超过光速，而和客观上超光速粒子就不存在等同起来。因此，从这个意义上说，超光速粒子存在与否都满足罗仑兹变换。

参考文献

[1] A.H.MATBEEB: "ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЛЬНОСТИ" ИЭДАТЕЛЬСТВО "ВЫШАЯ ШКОЛА" МОСКВА—1964. 319—320

[2] 北京大学物理系 "电动力学" 人民教育出版社. 1962.261.